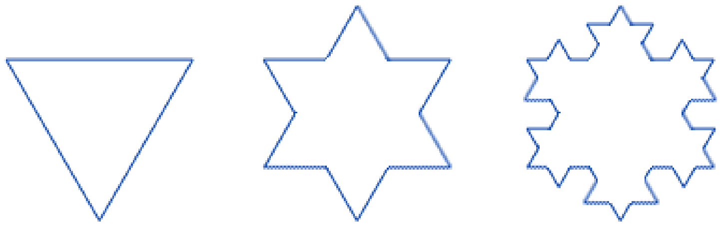
16 - Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke

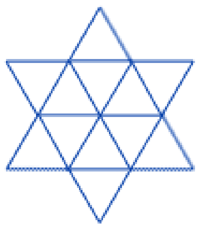
Die Kochsche Schneeflocke entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge a, Flächeninhalt $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ durch fortgesetztes Ansetzen kleinerer Dreiecke:



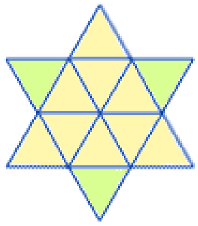
In jedem Schritt werden alle bestehenden Seiten gedrittelt und jeweils gleichseitige Dreiecke angesetzt, deren Seitenlänge ein Drittel des bestehenden Seitenlänge ist. Dieser Schritt wird unendlich oft wiederholt. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke.

Lösung

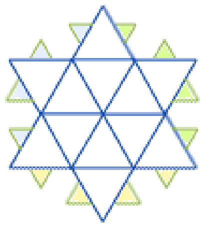
Das große Startdreieck unterteilen wir als erstes in kleinere Dreiecke, die genau so groß sind wie die Dreiecke, die im ersten Schritt angefügt werden:



Die neuen Dreiecke sind von Flächeninhalt her $1/9$ so groß wie das ursprüngliche Dreieck.



Auf jeder Seite des ursprünglichen Dreiecks entsteht ein neues Dreieck, also insgesamt 3 neue.
Zweiter Schritt:



Die neuen Dreiecke sind 1/9 so groß wie die, die im ersten Schritt entstanden sind, also $(1/9)^2$ so groß wie das ursprüngliche Dreieck. Auf jeder Seite des ursprünglichen Dreiecks entstehen 4 Dreiecke, also insgesamt 3*4 neue.
In jedem weiteren Schritt n ist der Flächeninhalt der neuen Dreiecke:

$$F_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot F_{original}$$

Die Anzahl der neuen Dreiecke ist:
$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot ... \cdot 4$ (n mal)
also

$$3 \cdot 4^{n-1}$$

Der Flächeninhalt wächst also in jedem Schritt um

$$\Delta F = 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot F_{original}$$

Das ergibt einen Gesamtflächeninhalt von

$$F_{ges} = F_{original} \left(1 + 3 \cdot 4^0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 3 \cdot 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + ...\right)$$

Wir klammern die 3 aus, die in jedem Summanden bis auf den ersten vorkommt:

$$F_{ges} = F_{original} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 4^0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + ... \right)$$

Nun bringen wir die Faktoren 4 und (1/9) in den Summanden auf den gleichen Exponenten, indem wir die Klammer durch 4 teilen. Wir ziehen anschließend zusammen:

$$F_{ges} = F_{original} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + ... \right)$$

$$F_{ges} = F_{original} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + ... \right)$$

Die Summanden mit größer werdenden Exponenten lassen sich als Summe darstellen:

$$F_{ges} = F_{original} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right)$$

Den Grenzwert dieser Reihe können wir nicht ohne weiteres berechnen. Wir bringen die Reihe daher auf ein Format, mit dem wir umgehen können: Die geometrische Reihe. Diese beginnt mit n=0, wir ändern daher die Grenze der Summe und subtrahieren den so hinzugefügten Summanden:

$$F_{ges} = F_{original} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right)$$

Der Grenzwert lässt sich nun berechnen. Wir fassen anschließend weiter zusammen und erhalten die Lösung für den Flächeninhalt nach unendlich vielen Schritten in Abhängigkeit vom Flächeninhalt des Originaldreiecks:

$$F_{ges} = F_{original} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = F_{original} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{5} \right) = F_{original} \cdot \frac{8}{5}$$

Wir können nun noch die in der Aufgabenstellung gegebene Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks einsetzen:

$$F_{ges} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$$