RHEIN.-WESTF. TECHN. HOCHSCHULE AACHEN
Lehrstuhl C für Mathematik (Analysis)
Prof. H. Rauhut, Dr. H. Günzel, C. Jung, M.Sc

Aachen, den 27.10.2016

Analysis I - Übungsblatt 03

Teil A

Aufgabe 1
Zeigen Sie mit Hilfe einer Indexverschiebung nach Zerlegung des Bruches, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die beiden Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung

$$1 + x = x^2.$$

b) Es seien $a_1, a_2 \ldots$ reelle Zahlen derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Man kann die Zahlen a_n rekursiv definieren. Dazu seien x_1, x_2 die obigen Lösungen sowie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann setzen wir $a_1 =: c_1x_1 + c_2x_2$ und $a_2 := c_1x_1^2 + c_2x_2^2$. a_3 etc. ergeben sich rekursiv aus obiger Regel. Zeigen Sie, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A(n) \qquad\qquad a_n = c_1x_n^n - c_2x_2^n.$$

c) Bestimmen Sie c_1 und c_2 im Falle der klassischen Fibonacci-Folge, welche mit $a_1 = a_2 = 1$ startet.

Aufgabe 3
Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

a) $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in \mathbb{K}$.

b) $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$ (Vorzeichen-Umkehrung).

Aufgabe 4
Sei $\mathbb{K} = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge.

(i) Setzen Sie die folgenden Verknüpfungstabellen so fort, dass $\mathbb{K}$ mit diesen Verknüpfungen einen Körper bildet (d.h. $\mathbb{K}$ erfüllt mit den so definierten Operationen „+" und „·" die Körperaxiome). Sie müssen die Gültigkeit der Assoziativgesetze und die des Distributivgesetzes nicht prüfen (zu viele Fälle).

$+$	a	b	c
a			
b		c	
c			

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	
b		b	
c			

Welches Element des Körpers $\mathbb{K}$ ist das Nullelement bzw. das Einselement? Ist die Fortsetzung eindeutig?

(ii) Verifizieren Sie, dass auf $\mathbb{K}$ keine Ordnung eingeführt werden kann, welche die Anordnungsaxiome erfüllt, d.h. zeigen Sie, dass für mindestens ein Paar von Elementen $x, y \in \mathbb{K}$ nicht gilt: $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.

Teil B

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe einer Indexverschiebung nach Zerlegung des Bruches, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{N}{2N+1}$$

gilt.

Aufgabe 6 (12 Punkte)
a) Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m = 2^n$. Zeigen Sie, dass für alle nicht negativen $a_1, \dots, a_m$ die Ungleichung

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_m \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_m}{m} \right)^m$$

gilt.
b) Folgern Sie ferner die Ungleichung:

$$a_1 a_2 a_3 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^3.$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, b \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie:

a) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$. (Nullteilerfreiheit)

b) dass die Gleichung $x^2 = a^2$ in $\mathbb{K}$ nur die Lösungen $x = a$ und $x = -a$ besitzt.

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \{a, b, c, d\}$ eine vierelementige Menge.

(i) Setzen Sie die folgenden Verknüpfungstabellen so fort, dass $\mathbb{K}$ mit diesen Verknüpfungen einen Körper bildet (d.h. $\mathbb{K}$ erfüllt mit den so definierten Operationen „$+$" und „$\cdot$" die Körperaxiome). Sie müssen die Gültigkeit der Assoziativgesetze und die des Distributivgesetzes nicht prüfen (zu viele Fälle).

$+$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a		
b		b		
c				
d				

Welches Element des Körpers $\mathbb{K}$ ist das Nullelement bzw. das Einselement? Ist die Fortsetzung eindeutig?

(ii) Verifizieren Sie, dass auf $\mathbb{K}$ keine Ordnung eingeführt werden kann, welche die Anordnungsaxiome erfüllt, d.h. zeigen Sie, dass für mindestens ein Paar von Elementen $x, y \in \mathbb{K}$ nicht gilt: $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.

Abgabe bis spätestens Montag, dem 07.11.2016, um 12:00 Uhr im Kasten gegenüber Hörsaal I.