LA 1 WS 08/09 Zettel 4

Nils Mahrt

21. November 2008

1. Aufgabe

Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Sei $v = (1, \ldots, 1)$ und sei für $i = 1, \ldots, n$ der vektor $v_i = v - e_i$. Dann gilt für alle i:

$$e_i = v - v_i = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \right) - v_i$$

Damit ist $e_i \in L(v_1, \ldots, v_n)$ und daher $\mathbb{R}^n = L(e_1, \ldots, e_n) \subseteq L(v_1, \ldots, v_n)$. Damit ist gezeigt, dass $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem ist. Dass dieses Erzeugendensystem auch eine Basis ist, folgt darus, dass die Dimension des Raumes gleich der Anzahl der Vektoren im Erzeugendensystem ist.

Nun ist noch e_1 als Linearkombination darzustellen:

$$e_1 = v - v_1 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \right) - v_1 = -\frac{n-2}{n-1} v_1 + \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} v_j.$$

2. Aufgabe

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine Kette der Länge n in V ist eine Folge $U_0, \ldots, U_n$ von Untervektorräumen in V mit:

$$U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_{n-1} \subsetneq U_n.$$

Sei $d(V)$ die maximale Länge einer Kette von Untervektorräumen in V. Dann ist zu zeigen, dass $d(V) = \dim(V)$ gilt.

Dazu zeige ich zunächst, dass die Dimension von V eine obere Schranke für die Länge einer Kette ist. Sei $U_0, \ldots, U_n$ eine Kette in V. Dann gilt nach der Vorlesung für $i = 1, \ldots, n$:

$$\dim U_{i-1} < \dim U_i$$

Da Dimensionen von Vektorräumen ganzzahlig sind, folgt daraus:

$$\dim U_{i-1} + 1 \leq \dim U_i$$

Da $\dim U_0 \geq 0$ ist, folgt per Induktion, dass $\dim U_n \geq n$ gilt. Da U_n ein Untervektorraum von V ist folgt:

$$n \leq \dim U_n \leq \dim V.$$

Damit kann die Kette von Untervektorräumen nicht länger als die Dimension von V sein. Insbesondere folgt daraus, dass das Maximum existiert und $d(V) \leq \dim V$ ist.

Nun bleibt zu zeigen, dass in einem m-dimensionalen Vektorraum eine Kette von Untervektorräumen der Länge m existiert. Sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V. Für $i = 0, \ldots, m$ sei $U_i = L(v_1, \ldots, v_i)$ definiert. Dann ist klar, dass $U_{i-1} \subseteq U_i$ gilt. Die Gleichheit kann nicht gelten, da sonst die Vektoren $v_1, \ldots, v_i$ linear abhängig wären, was ein Widerspruch dazu ist, dass $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V ist. Somit ist eine Kette der Länge m gefunden und es gilt $d(V) \geq \dim V$.

Beide Ungleichungen zusammen ergeben die Behauptung.

3. Aufgabe

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Seien $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V. Die Behauptung:

$$\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim(U_i) - (k-1)\dim(V)$$

wird per Induktion über k gezeigt.

Induktionsanfang für $k = 1$:

$$\dim(U_1) = \dim(U_1) - 0\dim(V)$$

ist erfüllt.

Sei nun für ein $k > 0$ die Behauptung gezeigt. Dann ist zu zeigen, dass

$$\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_{k+1}) \geq \sum_{i=1}^{k+1} \dim(U_i) - (k-1)\dim(V)$$

gilt.

Waraus folgt:

$$\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_{k+1}) = \dim((U_1 \cap \cdots \cap U_k) \cap U_{k+1})$$
$$= \dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) + \dim(U_{k+1}) - \dim((U_1 \cap \cdots \cap U_k) + U_{k+1})$$
$$\geq \sum_{i=1}^{k} \dim(U_i) - (k-1)\dim(V) + \dim(U_{k+1}) - \dim(V) = \sum_{i=1}^{k+1} \dim(U_i) - k\dim(V)$$

Also folgt per Induktion die Behauptung.

4. Aufgabe

Sei K ein endlicher Körper. Dann ist zu zeigen, dass es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $m > 0$ gibt mit $|K| = p^m$.

Zunächst wird gezeigt, dass die Teilmenge $L := \{n \cdot 1_K | n \in \mathbb{N}\}$ ein Unterkörper von K ist. Es ist klar, dass $0 \cdot 1_K = 0_K$ und $1 \cdot 1_K = 1_K$ enthalten sind. Die Abgeschlossenheit unter Addition ist auch klar. Die Abgeschlossenheit unter Multiplikation folgt aus dem Distributivgesetz in K. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist ein additives Inverses zu $n \cdot 1_K$ zu finden. Sei $\operatorname{char} K = p$, weil K endlicher Körper ist, ist p eine Primzahl. Dann gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $kp > n$. Dann gilt

$$(kp - n) \cdot 1_K + n \cdot 1_K = (kp) \cdot 1_K = k \cdot (p \cdot 1_K) = k \cdot 0_K = 0_K$$

Somit gibt es ein additives Inverses zu $n \cdot 1_K$. Sei nun $n \cdot 1_K \neq 0_K$ vorausgesetzt. Dann ist ein multiplikatives Inverses in L gesucht. Da die Multiplikation mit $n \cdot 1_K$ nicht aus L herausführt und K nullteilerfrei ist, ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{array}{rccc} f: & L^* & \to & L^* \\ & x & \mapsto & x(n \cdot 1_K) \end{array}$$

Diese Abbildung ist injektiv, weil f eine Einschränkung der injektiven Abbildung

$$\begin{array}{rccc} g: & K^* & \to & K^* \\ & x & \mapsto & x(n \cdot 1_K) \end{array}$$

ist. Die Abbildung g wiederum ist injektiv, weil K^* eine Gruppe ist. Da f eine injektive Abbildung einer endlichen Menge in sich selbst ist, ist f auch surjektiv. Es gibt also ein Urbild der 1_K. Dieses Urbild ist das gesuchte Inverse. Also ist L ein Unterkörper von K.

Nun wird gezeigt, dass K ein L-Vektorraum ist. Dabei ist die Addition im Vektorraum definiert als die Addition in L und die Skalarmultiplikation die Einschränkung der Multiplikation in K. Es ist klar, dass $(L, +)$ eine abelsche Gruppe ist, weil L ein Körper ist. Die anderen Vektorraumaxiome gelten, weil K ein Körper ist und die Skalarmultiplikation vom Körper induziert wird. Da K endlich ist, folgt, dass K endlichdimensional sein muss. Sei nun $m = \dim_L K$.

Nun soll gezeigt werden, dass der Körper L genau p Elemente hat. Zunächst zeigen wir, dass $L = \{n \cdot 1_K | n = 0, \ldots, p-1\} =: L'$ gilt. Es ist klar, dass L' in L enthalten ist. Um die andere Inklusion zu zeigen sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es $s \in \mathbb{N}$ und $r = 0, \ldots, p-1$ mit $n = ps + r$. Nun gilt:

$$n \cdot 1_K = (ps + r) \cdot 1_K = ps \cdot 1_K + r \cdot 1_K = r \cdot 1_K \in L'$$

Also sind die beiden Mengen gleich. Um zu zeigen, dass L mindestens p Elemente besitzt, wird nun gezeigt, dass die Elemente in $n \cdot 1_K$ für $n = 0, \ldots, p-1$ verschieden sind. Seien also $n, n' = 0, \ldots, p-1$ mit $n \cdot 1_K = n' \cdot 1_K$. O.B.d.A. sei

$n \geq n'$. Dann ist $0 \leq n - n' < p$ und $(n - n') \cdot 1_K = n \cdot 1_K - n' \cdot 1_K = 0_K$. Da p die Charakteristik von K ist, folgt $n - n' = 0$, das heißt $n = n'$. Also gibt es genau p verschiedene Elemente in L.

Der m-dimensionale L-Vektorraum K ist isomorph zu L^m. Es gibt also insbesondere eine Bijektion zwischen K und L^m. Letzterer Vektorraum hat p^m Elemente, weil es für jede der m Koordinaten eines Vektors genau p mögliche Werte gibt. Also hat auch K genau p^m Elemente.

5. Aufgabe

Sei V ein reller Vektorraum und v_1, v_2, v_3, v_4 Vektoren in V.

Die Vekotren w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 sind alle als Linearkombination der Vektoren v_i definiert, also insbesondere in deren linearen Hülle $L := L(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Da man nach dem Basisauswahlsatz aus v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis für L auswählen kann, folgt, dass

$$\dim L \leq 4$$

ist.

Die fünf Vektoren w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 liegen also in einem maximal 4-dimensionalen Unterraum von V und müssen daher linear abhängig sein.

6. Aufgabe

Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch folgende Vorschriften für $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_2(x) = \sin(2x)$$

$$f_3(x) = (1 + \cos(x))\sin(x)$$

Dann lässt sich f_3 mit Hilfe der Additionstheoreme als Linearkombination der anderen beiden Funktionen darstellen:

$$f_3(x) = (1 + \cos(x))\sin(x) = \sin(x) + \cos(x)\sin(x) = f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)$$

Also ist $L(f_1, f_2, f_3) = L(f_1, f_2)$. Um zu zeigen, dass f_1, f_2 eine Basis von $L(f_1, f_2, f_3)$ ist, ist nun noch ihre lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

Seien also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $af_1 + bf_2 = 0$. Wenn wir in diese Abbildungen $\frac{\pi}{2}$ einsetzen, erhalten wir also insbesondere:

$$0 = a\sin(\frac{\pi}{2}) + b\sin(\pi) = 1a + 0b = a$$

Also ist $a = 0$. Da f_2 nicht die Nullabbildung ist, muss auch $b = 0$ sein. Also sind f_1, f_2 linear unabhängig und somit eine Basis von $L(f_1, f_2, f_3)$.