Übungsblatt 5

Abgabe: 22. Mai 2018, 09:15 Uhr

Aufgabe 1: Polarkoordinatentransformation (10 = 4+3+3 Punkte)
Gegeben sei die Polarkoordinatentransformation $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $P(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass P in jedem Punkt $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und bestimmen Sie für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ die Jacobi-Matrix $J_P(r, \varphi)$.

b) Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \supset V \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $F := f \circ P : U \to \mathbb{R}$. Dabei sei U so gewählt, dass f in allen Punkten $P(r, \varphi)$, für $(r, \varphi) \in U$, definiert ist, d.h. $U = P^{-1}(V) = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, P(r, \varphi) \in V\}$.

c) Bestimmen Sie nun $J_F(r, \varphi)$ für $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|^{-2}$.

Aufgabe 2: Funktionen mit Ableitung 0: (10 = 4+4+2 Punkte)

a) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und konvex und $f : U \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar mit der Eigenschaft, dass für alle $(x, y) \in U$ $\partial_y f(x, y) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass f dann nur von x abhängt.

b) Es sei jetzt $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x \geq 0, \quad y = 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \setminus L \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} x^2, & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus L$ total differenzierbar und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ ist $\partial_y f(x, y) = 0$, aber f hängt von y ab.

c) Wieso widersprechen sich die Ergebnisse aus a) und b) nicht?

Aufgabe 3: Taylorpolynom (10 = 2+3+5 Punkte)

a) Multiindex-Notation

(i) Die Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^4$ und die Vektoren $x \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}^4$ seien definiert durch $\alpha := (2, 3, 1)$, $\beta := (3, 1, 2, 0)$, $x := (\sqrt{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, $y := (\frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$. Bestimmen Sie $|\alpha|$, $|\beta|$, $\alpha!$, $\beta!$, x^α und y^β.

(ii) Seien nun $\alpha := (2, 1, 4)$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^4 \sin x_3$. Bestimmen Sie $\partial^\alpha f$.

b) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy}$ das Taylorpolynom dritter Ordnung um den Entwicklungspunkt $(1, 2)$.

Aufgabe 4: Restglied der Taylorentwicklung: (10 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in \mathcal{C}^m(U)$, so gilt für alle $a \in U$ für das m-te Taylorpolynom von f in a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_m f(x;a)}{\|x-a\|_2^m} = 0.$$

Präsenzaufgabe 5: Ein Rechentrick mit der Kettenregel

Verwenden Sie die mehrdimensionale Kettenregel, um die Ableitung der differenzierbaren Funktion $\Psi : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $\Psi(x) := \arcsin \sqrt{1-x^3}$ zu bestimmen. Definieren Sie dazu $g : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ durch $g(x) := \left(\begin{smallmatrix} x \\ \Psi(x) \end{smallmatrix}\right)$ und $f : (0,1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ durch $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \sin^2 y + x^3 - 1$ und zeigen Sie, dass $f \circ g = 0$ gilt. Leiten Sie diese Identität dann ab.

Hinweis: *Um die eindimensionale Kettenregel anzuwenden, müssten Sie die Ableitung von* arcsin *kennen, das ist bei diesem Rechenweg nicht nötig.*

Präsenzaufgabe 6: Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

besitzt zwar überall alle zweiten partiellen Ableitungen, ist aber in $(0,0)$ nicht einmal stetig. Was halten Sie von folgender Argumentation: „Eine Funktion wie f kann es eigentlich nicht geben, weil ja zum Beispiel die zweite partielle Ableitung $\partial_x \partial_x f(x,y)$ gerade die x-Ableitung der Funktion $\partial_x f(x,y)$ ist und wir aus Analysis I wissen, dass differenzierbare Funktionen immer stetig sind. Also müssen die ersten partiellen Ableitungen stetig sein. Dann ist aber f stetig partiell differenzierbar, also total differenzierbar, also stetig."

Hinweis: *An dieser Funktion kann man gut das partielle Differenzieren üben!*

Viel Erfolg!