$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{(x-1)^2} = \frac{p(x)}{q(x)}$$ (1)

Definitionslücke:

$q(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ $1\sqrt{\ }$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$p(1) = 1 - 4 + 4 = 1 \neq 0$

Nenner wird bei $x = 1$ Null. In diesem Fall ist der Zähler ungleich Null, nämlich 1. Daher liegt in x_1 eine Polstelle vor.

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2}{((-x)-1)^2} = \frac{x^4 + x^3 + 4x^2}{(-x-1)^2}$$

Somit: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ also die Funktion weder gerade noch ungerade.

Symmetrie zur Geraden $x = 1$:

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^2 \ ((1-x)-2)^2}{((1-x)-1)^2} = \frac{(1-x)^2(-x-1)^2}{(-x)^2}$$

$$= \frac{(1-2x+x^2)(x^2+2x+1)}{x^2}$$

$$f(1+x) = \frac{(1+x)^2 \ ((1+x)-2)^2}{((1+x)-1)^2} = \frac{(1+x)^2 \ (x-1)^2}{x^2} = \frac{(1+2x+x^2)(x^2-2x}{x^2}$$

d.h. $f(1+x) = f(1-x)$

Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x^4-4x^3+4x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$p(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-2)^2 = 0$ $\qquad x_{1/2} = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x-2 = 0$

$x = 2$ $\qquad x_{3/4} = 2$

$\Rightarrow$ Doppelte Nullstellen bei $x_{1/2} = 0$ und $x_{3/4} = 2$.

Verhalten $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2} = \infty$$

Extrema:

$$f'(x) = \frac{(4x^3-12x^2+8x)(\cancel{x-1})^2 - [2(\cancel{x-1})(x^4-4x^3+4x^2)]}{(\cancel{x-1})^4}$$

$$= \frac{4x^4-4x^3-12x^3+12x^2+8x^2-8x-2x^4+8x^3-8x^2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^4-8x^3+12x^2-8x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^3-4x^2+6x-4)}{(x-1)^3}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

Also $2x(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) = 0$

$\Rightarrow x_5 = 0$

$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ für $x_6 = 2$

hinreichende Bedingung:

$$f''(x) = \frac{(8x^3 - 24x^2 + 24x - 8)(\cancel{x-1})^3 - [3(\cancel{x-1})^2(2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x)]}{(\cancel{x-1})^5}$$

$$= \frac{2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x}{(x-1)^3}$$

$f''(0) = 0$

$f''(2) = 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 2$

Monotonieverhalten:

monoton wachsend $f'(x) \geq 0$

monoton fallend $f'(x) \leq 0$

$f(x)$ monoton fallend für $I_1 = \{-\infty < x < 0\}$

$f(x)$ " wachsend " $I_2 = \{0 < x < 2\}$

$f(x)$ " fallend " $I_3 = \{2 < x < \infty\}$

Krümmungsverhalten:

?