Beispiel-Klausuraufgaben

Lineare Algebra I, WS 2016/17, Prof. Dr. Alice Niemeyer

Zur Orientierung sind die Aufgaben mit Punkten versehen. Es gibt insgesamt 40 Punkte und zum Bestehen der Klausur benötigen Sie die Hälfte, also 20 Punkte. Die Bearbeitungszeit bei der Klausur beträgt 90 Minuten.
(Zwei zusätzliche Aufgaben über Determinanten mit weiteren 10 Punkten sind für diejenigen gedacht, die die Klausur nach einer alten Prüfungsordnung mitschreiben. Die Bearbeitungszeit bei der Klausur ist 30 Minuten länger.)

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

1 Es seien gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 1}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$.

Ergebnis: $\boxed{}$ *(4 Punkte)*

(b) Berechnen Sie Rang(A). Rang$(A) =$ $\boxed{}$ *(1 Punkt)*

2 Gegeben sei die invertierbare Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie die Inverse. $B^{-1} =$ $\boxed{}$ *(4 Punkte)*

3 Sei $p = X^3 - X$ und $V = \mathbb{Q}[X]/p\mathbb{Q}[X]$. Sei

$$\varphi : V \to V, \quad f + p\mathbb{Q}[X] \mapsto X^2 f + p\mathbb{Q}[X].$$

Wir wählen $B = ([1], [X], [X^2])$ als Basis von V (wobei $[f] = f + p\mathbb{Q}[X]$).

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M = {}^B\varphi^B =$ *(2 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_M(X) =$ *(2 Punkte)*

(c) Finden Sie eine Basis C von V aus Eigenvektoren von M, und berechnen Sie die Matrizen ${}^C id_V^B$ und ${}^C\varphi^C$. *(3×1 Punkt)*

$C = ($ $)$, ${}^C id_V^B =$, ${}^C\varphi^C =$

4 Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit geordneter Basis $B = (E_{11}, 3E_{12}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$. Wir betrachten den Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit Abbildungsmatrix

$$ {}^{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. $$

(a) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an: *(2 Punkte)*

(b) Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an: *(2 Punkte)*

(c) Es sei $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_B(v) =$ *(2 Punkte)*

5	**Diese Aufgabe ist eine Wiederholung nur für diejenigen, die die Klausur nach einer alten Prüfungsordnung schreiben. Das Thema der zusätzlichen Aufgaben ist "Determinanten", wie es in der Vorlesung von Prof. Zerz behandelt wurde.** Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $$A_a = \begin{pmatrix} a^2-1 & 1 & 1 \\ a^2-1 & a & 1 \\ -a-1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$ (a) Geben Sie die Determinante von A_a an: $\det(A_a) = \boxed{}$ *(2 Punkte)* (b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{}$ *(2 Punkte)* (c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist A invertierbar und $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{}$ *(2 Punkte)*
Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.	
6	Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $A \in K^{n\times n}$ und $B = A - cI_n$ mit $c \in K$. Zeigen Sie: (a) Es ist $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $a - c$ ein Eigenwert von B ist. *(2 Punkte)* (b) Es ist A genau dann invertierbar, wenn $-c$ kein Eigenwert von B ist. *(2 Punkte)*
7	Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Weiter seien $X \subseteq V$ und $Y \subseteq W$ endliche Teilmengen. Sind die folgenden Aussagen richtig? Falls ja, geben Sie einen Beweis, und falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an. (a) Falls φ injektiv ist und X linear unabhängig ist, so ist $\varphi(X)$ auch linear unabhängig und hat genau so viele Elemente wie X. *(2 Punkte)* (b) Falls ψ surjektiv ist, sowie $Y = \varphi(X)$ und Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig. *(2 Punkte)*
8	Es seien K ein Körper und U, V, W drei K-Vektorräume. Weiter seien $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ und $\psi \in \text{Hom}(V, W)$ so, dass $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie *(4 Punkte)* $$V = \text{Bild}(\varphi) \oplus \text{Kern}(\psi).$$

9	Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ die Matrix, deren Einträge alle gleich 1 sind. Weiter sei $B = A - cI_n$ mit $c \in K$. (a) Zeigen Sie *(3 Punkte)* $$Rang(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } c = 0 \\ n-1 & \text{falls } c = n \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$ (b) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(b_1, \dots, b_n)$. Weiter seien $v = \sum_{i=1}^{n} b_i$ und $v_i = v - c \cdot b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Für welche $c \in K$ bildet $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V? Begründen Sie Ihre Antwort. *(3 Punkte)*
10	**Diese Aufgabe ist eine Wiederholung nur für diejenigen, die die Klausur nach einer alten Prüfungsordnung schreiben. Das Thema der zusätzlichen Aufgaben ist "Determinanten", wie es in der Vorlesung von Prof. Zerz behandelt wurde.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch, das heißt $A^t = -A$. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ ist. *(4 Punkte)*