2. Quadratische (polynomische) Regression

Im Falle der polynomischen Regression vom Grad 2 (quadratisch) wird die Funktion

$$\hat{y} = f(\hat{x}) = a \cdot \hat{x}^2 + b \cdot \hat{x} + c \tag{7}$$

unter der Bedingung gesucht, dass die Funktion

$$V(a,b,c) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c\right)^2 \tag{8}$$

der Summe der Quadrate der Abstände der tatsächlichen y-Werte von den berechneten $\hat{y}$-Werten ein Minimum hat.

Zur Bestimmung der Konstanten *a*, *b* und *c* in Gleichung (8) werden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$ und $\frac{\partial V}{\partial c}$ gleich null gesetzt, um jeweils das Minimum zu erhalten:

Partielle Ableitung nach *a*:

$$\rightarrow \frac{\partial V(a,b,c)}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c\right) \cdot \left(-x_i^2\right) = 0$$

dividiert durch *k* ergibt: $\overline{y_i x_i^2} = a \cdot \overline{x_i^4} + b \cdot \overline{x_i^3} + c \cdot \overline{x_i^2}$ (9)

Partielle Ableitung nach *b*:

$$\rightarrow \frac{\partial V(a,b,c)}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c\right) \cdot \left(-x_i\right) = 0$$

dividiert durch *k* ergibt: $\overline{y_i x_i} = a \cdot \overline{x_i^3} + b \cdot \overline{x_i^2} + c \cdot \overline{x_i}$ (10)

Partielle Ableitung nach *c*:

$$\rightarrow \frac{\partial V(a,b,c)}{\partial c} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c\right) \cdot (-1) = 0$$

dividiert durch *k* ergibt: $\overline{y_i} = a \cdot \overline{x_i^2} + b \cdot \overline{x_i} + c$ (11)

Es entsteht wieder ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen *a, b* und *c*, dessen Lösung die optimalen Konstanten liefert:

$$a = \frac{\left(\overline{y_i x_i^2} - \overline{y_i} \cdot \overline{x_i^2}\right) \cdot \left(\overline{x_i^2} - \left(\overline{x_i}\right)^2\right) - \left(\overline{y_i x_i} - \overline{y_i} \cdot \overline{x_i}\right) \cdot \left(\overline{x_i^3} - \overline{x_i} \cdot \overline{x_i^2}\right)}{\left(\overline{x_i^4} - \left(\overline{x_i^2}\right)^2\right) \cdot \left(\overline{x_i^2} - \left(\overline{x_i}\right)^2\right) - \left(\overline{x_i^3} - \overline{x_i} \cdot \overline{x_i^2}\right)^2} \tag{12}$$

$$b = \frac{\overline{y_i x_i} - \overline{y_i} \cdot \overline{x_i} - a \cdot \left(\overline{x_i^3} - \overline{x_i} \cdot \overline{x_i^2}\right)}{\overline{x_i^2} - \left(\overline{x_i}\right)^2} \tag{13}$$

$$c = \overline{y_i} - a \cdot \overline{x_i^2} - b \cdot \overline{x_i} \tag{14}$$

In den Gleichungen (13) und (14) wird auf das Einsetzen der kompletten Formel der zuvor berechneten Konstanten aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Beispiel:

Messtabelle **Mittelwerte**

x	1	2	3	4	5	6	7	4
y	0,38	1,15	2,71	3,92	5,93	8,56	11,24	4,84142857
xy	0,38	2,3	8,13	15,68	29,65	51,36	78,68	26,5971429
x^2	1	4	9	16	25	36	49	20
x^3	1	8	27	64	125	216	343	112
x^4	1	16	81	256	625	1296	2401	668
yx^2	0,38	4,6	24,4	62,72	148,25	308,2	550,76	157,037143

Die mit den Formeln (12) bis (14) berechneten Konstanten sind:

a =	0,19642857
b =	0,23642857
c =	-0,03285714

Die grafische Darstellung der Datenpunkte und der Regressionsparabel ergibt: