Beweis zur durchschnittlichen Änderungsrate

Es gibt zwei Möglichkeiten die durchschnittliche Steigung in einem Intervall einer Funktion zu berechnen. So kann man zum einen den Differenzenquotienten verwenden oder aber man errechnet die Steigung mittels einer anderen definierten Methode:

1. Methode

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Methode

Als Anmerkung sollte man hier noch hinzufügen, dass diese Methode kürzer, aber etwas eingeschränkt ist. Sie funktioniert nur bei Funktionen der Form $f(x) = ax^n + m$

Dann kann man in folgende Gleichung x und x_0 , sowie den Exponenten n einsetzten:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{n}$$

Resultat

Wenn die Funktion die Form $f(x) = ax^n + m$ hat, so gilt im Intervall $[x_0;x]$ folgendes:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{n}$$

Der Beweis

Zunächst hier noch einmal die Formel:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f'(x)-f'(x_0)}{n}$$

Hier wird dann die Funktionsform, bzw. ihre Ableitung in die Formel eingesetzt:

$$\frac{(ax^n+m)-(a{x_0}^n+m)}{x-x_0}=\frac{nx^{n-1}-n{x_0}^{n-1}}{n}$$

Nun wird die Funktion auf der linken Seite ausmultipliziert:

$$\frac{ax^n+m-a{x_0}^n-m}{x-x_0}=\frac{nx^{n-1}-n{x_0}^{n-1}}{n}$$

So kann man m einfach weglassen, denn es gilt $m-m=0$:

$$\frac{ax^n-a{x_0}^n}{x-x_0}=\frac{nx^{n-1}-n{x_0}^{n-1}}{n}$$

Nun teilt man den linken Bruch in 2 Brüche auf:

$$\frac{ax^n}{x}-\frac{a{x_0}^n}{x_0}=\frac{nx^{n-1}-{x_0}^{n-1}}{n}$$

Jetzt kann man jeweils auf beiden Seiten kürzen und erhält Folgendes:

$$ax^{n-1}-a{x_0}^{n-1}=ax^{n-1}-a{x_0}^{n-1}$$

Fazit

Somit ist bewiesen, dass für die Form $f(x)=ax^n+m$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f'(x)-f'(x_0)}{n}=ax^{n-1}-a{x_0}^{n-1}$$

Für die Funktion $h(t)=20-5t^2$, welche man umformen kann zu $h(t)=-5t^2+20$, so ist $a=-5$ und $n=2$, gilt also Folgendes (Intervall [0; 1] ->$x_0=0;x=1$):

$$\frac{h'(1)-h'(0)}{2}=-5*1^1-(-5)*0^1=-5$$