Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: K. Fackeldey, G. Penn-Karras, S. Yanchuk
Assistenten: R. Altmann, A. Saplaouras

Wintersemester 2016/17

Abgabe im eigenen Tutorium
vom **14.11. – 18.11.2016**

3. Übung

Analysis I für Ingenieurwissenschaften

(Komplexe Zahlen)

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Absolutbetrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{2-3i}{-1+2i}, \qquad z_2 = (-1+i)^5, \qquad z_3 = \frac{3e^{\frac{2}{3}\pi i}}{2e^{\frac{1}{2}\pi i}}.$$

(b) Es sei $a > 0$ eine positive, reelle Zahl. Wir betrachten die Abbildung

$$z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto z(t) = a\cos(t) + i \cdot a\sin(t).$$

Was für ein geometrisches Objekt beschreibt das Bild von z in der komplexen Zahlenebene? Zeichnen Sie dieses für $a = 2$. Ist z injektiv?

(c) Vereinfachen Sie die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |(1-i)z + 2i| = 0\}$. [optional]

Aufgabe 2

Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

(c) $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + \overline{z_1})$. [optional]

Aufgabe 3

Finden Sie alle komplexwertigen Lösungen von

(a) $z^5 = -1$.

(b) $z^2 + (4+2i)z + 4i = 0$,

Hausaufgaben

Bitte schreiben Sie auf die Abgabe Ihre Namen, Matrikelnummern sowie den Namen der Tutorin/des Tutors und den Raum+Zeit des Tutoriums.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Absolutbetrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{2i+1}{i-1}, \qquad z_2 = \left(2e^{\frac{1}{4}\pi i} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^{10}$$

(b) Es seien $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ und $z_2 = 1 - i$. Finden Sie die Polardarstellung von z_1 und z_2. Berechnen Sie $(z_1)^3$ in der Polardarstellung sowie $|z_1 \cdot z_2|$ und $|z_1 \cdot \overline{z_2}|$.

(c) Betrachten Sie die Mengen

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}, \qquad N := \{z \in \mathbb{C} \mid \ z + \overline{z} \geq 0\}.$$

Beschreiben Sie die geometrischen Objekte, welches durch M, N und $M \cap N$ gegeben sind und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{Re}(z)$,

(b) $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Finden Sie alle komplexwertigen Lösungen von

(a) $z^3 = 27e^{\frac{3}{4}\pi i}$,

(b) $z^4 = 81i$.

Hinweis: Es genügt, wenn die Lösungen in der Polardarstellung angegeben werden.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte