Bewegungsaufgabe U-Boot

Bei einer militärischen Übung soll der Kurs eines U-Boots bestimmt werden, um dieses mit Flugzeugen anzugreifen.

Zwei Schiffe orten hierzu nacheinander das U-Boot und geben die Koordinaten an eine Flugzeugstaffel weiter.

Wenn das U-Boot zum ersten Mal geortet wird, dauert es 30 Minuten, bis die Flugzeuge vor Ort sind. (Hierbei wird von einer gleichförmigen und geradlinigen Bewegung des U-Bootes ausgegangen.)

Bei der ersten Ortung peilt das Schiff A von der Position $(0|0|0)$ das U-Boot in der Richtung $\vec{x}_A=\left(6|9|-\frac{1}{2}\right)$ an. Zur gleichen Zeit meldet das Schiff B (Position $(0|4|0)$) die Richtung $\vec{x}_B=\left(3|4|-\frac{1}{4}\right)$. Vier Minuten später ergibt die zweite Peilung der beiden Schiffe die U-Boot-Koordinaten $\left(23|36|-\frac{9}{4}\right)$.

(Alle Angaben in Kilometern.)

a) Berechne die Koordinaten des U-Bootes bei der ersten Peilung.

b) Befindet es sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?

c) Mit welcher Geschwindigkeit (in Kilometern pro Stunde) bewegt es sich?

d) Gib eine Geradengleichung für die U-Boot-Bewegung an, bei der die Geschwindigkeit des U-Bootes (in km/h) vorkommt.
Welche physikalische Bedeutung hat in solch einem Fall der Parameter?

e) Wo befindet sich das U-Boot beim Eintreffen der Flugzeuge, wenn man von einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung ausgeht?

f) Die (ebenfalls geradlinige und gleichförmige) Bewegung eines zweiten U-Bootes lässt sich durch die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}19\\31\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\13\\0{,}5\end{pmatrix}$ beschreiben.
(Ab dem Beginn der Ortung des ersten U-Bootes; t in Stunden)
Berechne die minimale Entfernung der beiden U-Boote. Passieren sie diesen Punkt bevor die Flugzeuge eintreffen?

Lösung:

zu a)

„Ortungsgeraden“: $g_A: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ $\quad g_b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt P_1:
$$\begin{array}{lclcll} x_1 & = & 0+6\cdot t & = & 0+3s & \rightarrow \; s=2\cdot t \\ x_2 & = & 0+9\cdot t & = & 4+4s & \qquad \rightarrow \; t=4 \\ x_3 & = & 0-0{,}5\cdot t & = & 0-0{,}25\,s & \end{array}$$
$$\rightarrow P_1 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{24} \\ \mathbf{36} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

zu b)

Aus P_1 und $P_2 = \begin{pmatrix} 23 \\ 36 \\ -2{,}25 \end{pmatrix}$ folgt der Richtungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}$.

Da die x_3-Komponente negativ ist, befindet sich das U-Boot auf Sinkfahrt.

zu c)

Die in 4 Minuten zurückgelegte Strecke: $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{1^2+0{,}25^2}$

Die in 60 Minuten zurückgelegte Strecke: $\sqrt{1^2+0{,}25^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 \approx 15{,}5\,[km]$

→ Das U-Boot bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von ca. 15,5 km/h.

zu d)

$$g_{U-Boot\,1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{60}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{24} \\ \mathbf{36} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} + \boldsymbol{t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-15} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-3{,}75} \end{pmatrix}$$

Der Parameter *t* steht hier für die seit der ersten Ortung vergangenen ***Zeit in Stunden***.

zu e)

Mit $t=0{,}5$ folgt für die U-Boot-Koordinaten nach 30 Minuten: $\mathbf{(16{,}5|36|-3{,}9)}$

zu f)

Abstandsfunktion U-Boot 1 – U-Boot 2 in Abhängigkeit der Zeit *t* (in Stunden):
$$d(t) = \sqrt{(24-15t-(19+2t))^2 + (36-(31+13t))^2 + (-2-3{,}75t-(-4+0{,}5t))^2}$$

Mit dem GTR ergibt sich für das Minimum: $d(0{,}333) \approx 1{,}1$ [km].

Der minimale Abstand von ca. 400 Metern wird somit nach ca. 20 Minuten erreicht $(1/3$ von 1 Stunde$)$ – also noch bevor die Flugzeuge eintreffen.