Lineare Algebra, Übung 9

1) Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension d. Es sei $W \subset V$ ein Untervektorraum der Dimension $e < d$.

Man beweise, dass es Unterräume $H_i \in V$, $i \in [1, t]$ gibt, so dass $\dim H_i = d - 1$ (d.h. Kodimension 1) und so dass

$$W = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_t.$$

Wie groß muss t mindestens sein, damit das geht?

2) Man betrachte die Vektoren in $\mathbb{R}^6$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ -6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \\ 8 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man finde eine Basis des Vektorraumes $V = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Man finde einen Komplementärraum von V, der von Standardvektoren erzeugt wird.

3) Es sei V ein Vektorraum. Es seien $u, v \in V$. Man beweise, dass mit die Folge u, v durch eine Folge von Scherungen in die Folge $v, -u$ überführen kann.

4) Man beweise, dass die folgenden Vektoren eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^6$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^6 \\ 6 \\ 2^7 \\ 2^8 \\ 2^8 \\ 2^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^6 \\ 4^6 \\ 6 \\ 3^7 \\ 3^8 \\ 3^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^6 \\ 5^6 \\ 6^6 \\ 6 \\ 4^8 \\ 4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^6 \\ 5^6 \\ 4^6 \\ 3^6 \\ 6 \\ 6^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^6 \\ 4^6 \\ 3^6 \\ 2^6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(Hinweis: Man benutze das Korollar 28 aus der Einleitung für $p = 7$.)

Abgabe bis Donnerstag, 16.6.2016, 14:00