MATHE 3 ET/IT BLATT 12 PR.

A1

$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,y \leq 1 \}$

$\Delta u = 0$ in $\mathring{M}$

$u_{|\partial M} = xy + y^2$

1) Nullwerte in Ecken erzeugen

Ansatz:

$v(x,y) = u(x,y) + ax + by + cxy + d$

i) $v(0,0) = \underbrace{u(0,0)}_{=0} + d \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad d = 0$

ii) $v(1,0) = \underbrace{u(1,0)}_{=0} + a \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad a = 0$

iii) $v(0,1) = \underbrace{u(0,1)}_{=1} + b \overset{!}{=} 0$

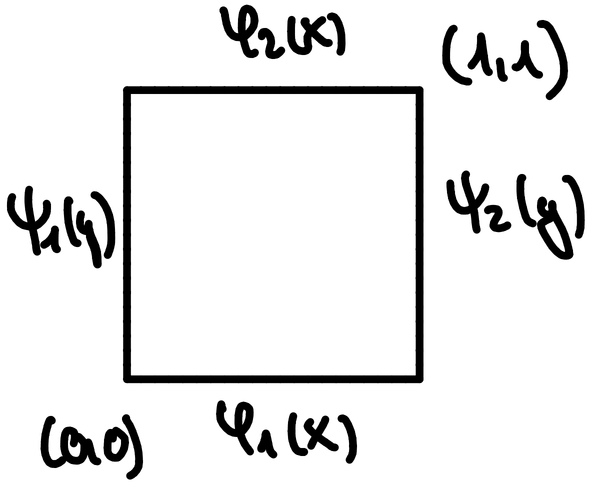
$\Leftrightarrow \quad b = -1$

iv) $v(1,1) = \underbrace{u(1,1)}_{=2} - 1 + c \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad c = -1$

also: $v(x,y) = u(x,y) - y - xy$

Randfunktionen:



1) $\varphi_1(x) = v(x,0)$

$= u(x,0)$

$= 0$

2) $\varphi_2(x) = v(x,1)$

$= u(x,1) - 1 - x$

$$= x + 1 - 1 - x$$

$$= 0$$

3) $\varphi_1(y) = v(0, y)$

$$= u(0, y) - y$$

$$= y^2 - y$$

4) $\varphi_2(y) = v(1, y)$

$$= u(1, y) - y - y$$

$$= y + y^2 - 2y$$

$$= y^2 - y$$

Löse 4 Teilprobleme

1) $\Delta v_1 = 0$, $v(x, 0) = \varphi_1(x)$

$v(x, 1) = v(0, y) = v(1, y) = 0$

2) $\Delta v_2 = 0$, $v(x, 1) = \varphi_2(x)$

$v(x, 0) = v(0, y) = v(1, y) = 0$

3) $\Delta V_3 = 0$, $V(0,y) = \varphi_1(y)$

$V(x,0) = V(x,1) = V(1,y) = 0$

4) $\Delta V_4 = 0$, $V(1,y) = \varphi_2(y)$

$V(x,0) = V(x,1) = V(0,y) = 0$

Lösungen der Teilprobleme ergeben sich durch Separationsansätze. Koeffizienten erhält man durch Fourier-Entw.

1) $\underset{\sim}{V_1}$ (allg. Quadrat $0 \leq x,y \leq l$)

$$V_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}(l-y)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$b_n = \frac{B_n}{\sinh(n\pi)}$$

mit $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$

konkret: $\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$

$\Rightarrow b_n = 0$

$\Rightarrow V_1(x,y) = 0$

2) V_2

$$V_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

$$b_n = \frac{B_n}{\sinh(n\pi)}$$

mit $B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi_2(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx$

konkret: $\varphi_2(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$

$\Rightarrow b_n = 0$

$\Rightarrow V_2(x,y) = 0$

3) $\underset{\sim}{V_3}$

$$V_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}(l-x)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right)$$

$$b_n = \frac{B_n}{\sinh(n\pi)}$$

mit

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) dy$$

Konkret:

$$B_n = 2 \cdot \int_0^1 (y^2 - y) \sin(n\pi y) \, dy$$

$$\underset{\text{p.I.}}{=} 2 \cdot \Big[\underbrace{- (y^2 - y) \cdot \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi y) \Big|_0^1}_{=0} + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 (2y-1) \cdot \cos(n\pi y) \, dy \Big]$$

$$\underset{\text{p.I.}}{=} \frac{2}{n\pi} \Big[\underbrace{(2y-1) \sin(n\pi y) \Big|_0^1}_{=0} - \frac{1}{n\pi} \cdot 2 \int_0^1 \sin(n\pi y) \, dy \Big]$$

$$= \frac{-4}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi y) \Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^3} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{-8}{(n\pi)^3} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$V_3(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{((2k+1)\pi)^3 \cdot \sinh((2k+1)\pi)} \cdot \sinh((2k+1)\pi \cdot (1-x)) \cdot \sin((2k+1)\pi \cdot y)$$

4) V_4

$$V_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right)$$

$$b_n = \frac{B_n}{\sinh(n\pi)} \quad \text{mit}$$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi_2(y) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} y\right) dy$$

konkret: $\varphi_2(y) = \varphi_1(y)$

$\Rightarrow$ Koeff. sind gleich!

$$V_4(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{((2k+1)\pi)^3 \cdot \sinh((2k+1)\pi)} \cdot \sinh((2k+1)\pi \cdot x) \cdot \sin((2k+1)\pi \cdot y)$$

Es gilt dann:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$
$$= V_3 + V_4$$

und

$$u = V_3 + V_4 + y + xy$$

A2

$$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathring{M}$$

$$u_{|\partial M} = x + y^2$$

Idee: Laplace-Operator in Polarkoord.,

dann Separationsansatz

allg. Lsg.: $\left(v(r,\varphi) = u(x,y) \right)$

$$v(r,\varphi) = c_0 + d_0 \cdot \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right) \left(c_n \cdot r^n + d_n \cdot r^{-n} \right) \right]$$

Koeff. durch Randfunktionen und

Fourier-Entw.

konkret:

Kreisring ⇝ 2 Randteile

(Kreis mit Radius $1 = R_1$,

" " $3 = R_2$)

$$V_{|\partial M}(r,\varphi) = r\cdot\cos(\varphi) + r^2\cdot\sin^2(\varphi)$$

1)

$$V(R_1,\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))$$

$(c_n + d_n)$

und

$$V_{|\partial M}(R_1,\varphi) = \cos(\varphi) + \sin^2(\varphi)$$

$$\sin^2(\varphi) = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left[e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos(2\varphi) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\varphi)\right]$$

d.h.: $\cos(\varphi) + \sin^2(\varphi)$

$$= \cos(\varphi) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)$$

Koeff. vgl. liefert:

i) $c_0 = \frac{1}{2}$

ii) $a_1(c_1 + d_1) = 1$

iii) $a_2(c_2 + d_2) = -\frac{1}{2}$

iv) $a_n(c_n + d_n) = 0 \quad \forall n > 2$

v) $b_n(c_n + d_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$

2) $V(R_2, \varphi)$

$$= c_0 + d_0 \cdot \ln(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) (c_n \cdot 3^n + d_n \cdot 3^{-n})$$

und

$$V_{18M}(R_2, \varphi) = 3 \cdot \cos(\varphi) + 9 \cdot \cos^2(\varphi)$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} 3\cos(\varphi) + 9\cdot\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\varphi)\right]$$

$$= \frac{9}{2} + 3\cos(\varphi) - \frac{9}{2}\cos(2\varphi)$$

Koeff.-vgl. liefert:

i) $c_0 + d_0\cdot\ln(3) = \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + d_0\cdot\ln(3) = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow d_0 = \frac{4}{\ln(3)}$$

ii) $a_1\cdot\left(3c_1 + \frac{1}{3}d_1\right) = 3$

iii) $a_2\cdot\left(9c_2 + \frac{1}{9}d_2\right) = -\frac{9}{2}$

iv) $a_n\cdot\left(3^n c_n + 3^{-n}d_n\right) = 0 \quad \forall n>2$

v) $b_n\cdot\left(3^n c_n + 3^{-n}d_n\right) = 0 \quad \forall n\geq 1$

Es gilt:

1) I: $a_1c_1 + a_1d_1 = 1$

II: $3a_1c_1 + \frac{1}{3}a_1d_1 = 3$

$$\mathrm{II} - 3\cdot\mathrm{I}: \quad \underbrace{\left(\frac{1}{3}-3\right)}_{=-\frac{8}{3}} a_1\cdot d_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1\cdot d_1 = 0$$

$$\mathrm{I} - 3\cdot\mathrm{II}: \quad -8\, a_1\cdot c_1 = -8$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1\cdot c_1 = 1$$

2) $\mathrm{I}: a_2\cdot c_2 + a_2\cdot d_2 = -\frac{1}{2}$

$\mathrm{II}: 9 a_2 c_2 + \frac{1}{9} a_2 d_2 = -\frac{9}{2}$

$$\mathrm{II} - 9\cdot\mathrm{I}: \quad \left(\frac{1}{9}-9\right) a_2\cdot d_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2\cdot d_2 = 0$$

$$\mathrm{I} - 9\cdot\mathrm{II}: \quad -80\cdot a_2 c_2 = \frac{80}{2} = 40$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2\cdot c_2 = -\frac{1}{2}$$

3) $\mathrm{I} \quad a_n\cdot c_n + a_n\cdot d_n = 0 \qquad \forall n>2$

$\mathrm{II} \quad 3^n a_n c_n + \frac{1}{3^n} a_n d_n = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a_n\cdot c_n = a_n\cdot d_n = 0 \quad \forall n>2$$

4) I $\quad b_n c_n + b_n d_n = 0$

II $\quad 3^n b_n c_n + \frac{1}{3^n} b_n d_n = 0$ $\quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \quad b_n \cdot c_n = b_n \cdot d_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

Die Lösung lautet daher:

$v(r,\varphi) =$

$\frac{1}{2} + \frac{4}{\ln(3)} \ln(r) + \cos(\varphi) \cdot r - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \cdot r^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\ln(3)} \ln(r) + r \cos(\varphi)$

$\quad + r^2 \sin^2(\varphi) - r^2 \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\ln(3)} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$\quad + x$

$\quad + x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\ln(3)} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 = u(x,y)$