Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2011
Dr. Hanna Peywand Kiani

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum 20.05.2011

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\delta\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \delta\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u \;=\; u_{xx} + u_{yy} \;=\; 0 \qquad \forall\, (x,y) \in \Omega}$$

Hinweise zur Aufgabe 1 bzw. 3) Für harmonische Funktionen gelten das **Maximumprinzip** und die **Mittelwerteigenschaft**:

- Eine in Ω harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.
- Sei u harmonisch im Kreis $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf dem Rand des Kreises $\delta B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) \;=\; \frac{1}{2\pi a} \oint_{\delta B_a(x_0,y_0)} u(x,y)ds}$$

Randbedingungen

Damit es eine eindeutige, vernünftige Lösung der DGL gibt, braucht man noch Randdaten.

Beispiel : $u =$ Temperatur in einem Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und auf dem äußeren Rand ist die Änderung der Temp. proportional zur Differenz der konstanten Außentemperatur u_A und der lokalen Temperatur $u(x,y)$:

$$u(x,y) \;=\; u_1 \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 1$$

$$\partial_n u(x,y) \;=\; k(u(x,y) - u_A) \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 4$$

Es folgen Produktansätze für die Aufgaben 2,3,4.

Laplacegleichung auf Rechtecken mit Dirichlet Randbedingungen

$$\Delta u = 0 \qquad u \in (0,L)\times(0,b)\,, \qquad u = g \text{ auf Rand von}(0,L)\times(0,b)\,.$$

Zunächst: sei g auf drei Seiten des Rechtecks $=0$. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \qquad u \in (0,L)\times(0,b)\,,\\ u(0,y) = u(L,y) = u(x,b) = 0, \qquad u(x,0) = g(x)\,. \end{aligned}$$

Produktansatz: $u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$ liefert

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0,$$

$$\Longrightarrow -\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

Die Randbedingungen liefern für nichttriviale Lösungen

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \Longrightarrow v(0) = 0, \quad u(L,y) = v(L)w(y) = 0 \Longrightarrow v(L) = 0$$

Die RWA $\quad \dfrac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda,\ v(0) = v(L) = 0$

liefert nur für $\boxed{\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2}$ nichttriviale Lösungen (Aufg.1 Blatt1)

Zugehörige Lösungen: $\boxed{v_k(x) = \sin\left(\dfrac{k\pi}{L}x\right)}$

Mit diesen $\lambda-$ Werten lösen wir die zweite DGL

$$w''(y) = \lambda_k w(y) = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 w(y) \Longrightarrow \boxed{w_k = A_k e^{-\frac{k\pi}{L}y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L}y}}$$

Alternativ: $w_k = a_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}y\right) + b_k \cosh\left(\frac{k\pi}{L}y\right)$

Ansatz mit den hyperbolischen Funktionen: siehe Vorlesungsfolien

Hier wird der Ansatz mit der exp-Fkt weiter bearbeitet.

Die dritte Null-Randbedingung liefert:

$$u(x,b) = v(x)\cdot w(b) = 0 \Longrightarrow w(b) = 0 \Longrightarrow A_k = -e^{2\frac{k\pi}{L}b}B_k$$

und damit $\boxed{w_k(y) = B_k\left[-e^{2\frac{k\pi}{L}b}e^{-\frac{k\pi}{L}y} + e^{\frac{k\pi}{L}y})\right]}$

Jede Funktion $u_k(x,y) = v_k(x)\cdot w_k(y)$ löst die DGL. und damit auch jede Summe dieser u_k.

Superposition:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} B_k\left[-e^{2\frac{k\pi}{L}b}e^{-\frac{k\pi}{L}y} + e^{\frac{k\pi}{L}y})\right]\sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

oder damit es übersichtlicher wird, mit $c_k = B_k e^{\frac{k\pi}{L}b}$ und mit $n \to \infty$

$$\boxed{u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} \;-\; e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)}$$

Zu erfüllen ist noch $u(x,0) = g(x)$ also

$$u(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} \;-\; e^{\frac{k\pi}{L}b} \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x) \;=\; g(x)$$

Bestimme dazu Four.koeff'n der ungeraden, $2L$-period. Fortsetzung von g.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\omega x)$$

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x)\, dx \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Dann gilt mit

$$c_k = \frac{\beta_k}{e^{-\frac{k\pi}{L}b} \;-\; e^{\frac{k\pi}{L}b}}$$

und damit $\boxed{u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} \;-\; e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)}$

oder mit $b_k = c_k/2$ $\boxed{u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}(y-b)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$

Sind die Nullranddaten anders verteilt, so muss der Ansatz angepasst werden.

Beispiel A:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \qquad & \text{auf } R := (0,\pi) \times (0,1) \\ u(x,0) = 0\,, \quad & u(x,1) = -\pi \sin(x) \qquad x \in [0,\pi] \\ u(0,y) = 0\,, \quad & u(\pi,y) = 0 \qquad y \in [0,1] \end{aligned}$$

u für zwei verschiedene $x-$ Werte = Null : fange mit der DGL für v an.

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \Longrightarrow v(0) = 0, \quad u(\pi,y) = v(\pi)w(y) = 0 \Longrightarrow v(\pi) = 0$$

Gleiche Aufgabe wie oben mit $L = \pi$. Nichttriviale Lösungen

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sin(kx), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Nun muss gelten: $-\dfrac{v''(x)}{v(x)} = \dfrac{w''(y)}{w(y)} = k^2$

$$w''(y) = k^2 w(y) \implies w_k = A_k e^{-ky} + B_k e^{ky}$$

$$u(x,0) = v(x) \cdot w(0) = 0 \implies w(0) = 0 \implies B_k = -A_k$$

Superposition:

$$u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{-ky} \;-\; e^{ky})\,\sin(kx)$$

Zu erfüllen ist noch $u(x,1) = -\pi\sin(x)$ also

$$u(x,1) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{-k} \;-\; e^{k})\,\sin(kx) \;=\; -\pi\sin(x)$$

Bestimme Fourierkoeffizinten der ungeraden, $2L = 2\pi$ periodisechen Fortsetzung der rechten Seite $g(x) = -\pi\sin(x)$ bei Entwicklung in $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$.
Hier können wir ablesen. Es muss gelten

$$u(x,1) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{-k} \;-\; e^{k})\,\sin(kx) \;\stackrel{!}{=}\; -\pi\sin(x)$$

ohne Rechnung erhält man:

$$c_1[e^{-1} - e^{1}] = -\pi\,, \qquad c_k = 0 \text{ für } k \neq 1$$
$$u(x,y) = \frac{\pi(e^{-y} \;-\; e^{y})}{e^{1} - e^{-1}}\,\sin(x)$$

Was tun wenn die Randdaten nicht auf drei Seiten verschwinden?

Idee: Problem in maximal 4 Teilprobleme zerlegen, bei denen jeweils auf drei Kanten Null vorgegeben ist und auf der vierten die ursprünglichen Randdaten. Teilprobleme lösen $\longrightarrow$ $u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4,$ und addieren.

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{4} u_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{4} \Delta u_k \;=\; 0$$

$$\sum_{k=1}^{4} u_k \;\text{(Kante 1)} \;=\; u_1(\text{ Kante 1 }) + 0 + 0 + 0$$

analog auf den anderen drei Seiten.

Ist also alles gut?

Beispiel: $\Delta u = 0$ auf $(0,1)\times(0,1)$ mit

$$u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = 1 - x \qquad x \in [0,1]$$
$$u(0,y) = \sin(\frac{\pi}{2}y)\,, \quad u(1,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$$

zerlegung in

$$\Delta u_1 = 0 \qquad \text{auf } R := (0,1)\times(0,1)$$
$$u_1(x,0) = 0\,, \quad u_1(x,1) = 1 - x \qquad x \in [0,1]$$
$$u_1(0,y) = 0\,, \quad u_1(1,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$$

und

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= 0 \qquad \text{auf } R := (0,1)\times(0,1) \\ u_2(x,0) &= 0\,, \quad u_2(x,1) = 0 \qquad x\in[0,1] \\ u_2(0,y) &= \sin(\frac{\pi}{2}y)\,, \quad u_2(1,y) = 0 \qquad y\in[0,1] \end{aligned}$$

lösen der Probleme und Addition der Ergebnisse brächte mit $u = u_1 + u_2$ auf den ersten Blick das richtige Ergebnis.

Aber:

1) Was ist mit den Randdaten für u_1 bzw. u_2 im Punkt $(0,1)$?
2) Welchen Wert würde u in $(0,1)$ annehmen? Vorgegeben war $u(0,1) = 1$.

Ausweg: Wir ziehen zunächst eine bilineare **Eckenfunktion**

$$u_E(x,y) = a + bx + cy + dxy, \qquad u = u_E \text{ in den Ecken}$$

von u ab. $v := u - u_E$ löst die DGL mit angepassten Daten, die in den Ecken verschwinden.

Beispiel B:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1) \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,1) = \frac{\pi - x}{\pi} - \pi\sin(x) \qquad x\in[0,\pi] \\ u(0,y) &= y^2\,, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad y\in[0,1] \end{aligned}$$

Schritt 1: Definiere $u_E = a + bx + cy + dxy$ mit

$u_E(0,0) = u(0,0) = 0 \Longrightarrow a = 0$

$u_E(0,1) = u(0,1) = \dfrac{\pi - 0}{\pi} - \pi\sin(0) = 1 \Longrightarrow c = 1$

$u_E(\pi,0) = u(\pi,0) = 0 \Longrightarrow b = 0$

$u_E(\pi,1) = u(\pi,1) = 0 \Longrightarrow c + d\pi = 0 \Longrightarrow d = -\frac{1}{\pi}$

Für $v = u - u_E = u - (y - \frac{1}{\pi}xy)$ erhalten wir das System

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \qquad \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1) \\ v(x,0) &= 0\,, \quad v(x,1) = \frac{\pi - x}{\pi} - \pi\sin(x) - (1 - \frac{1}{\pi}x) = -\pi\sin(x) \\ v(0,y) &= y^2 - y\,, \quad v(\pi,y) = 0 - (y - \frac{1}{\pi}\pi y) = 0 \end{aligned}$$

Schritt 2: Zerlegung in

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= 0 \qquad \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1) \\ v_1(x,0) &= 0\,, \quad v_1(x,1) = -\pi\sin(x) \qquad x\in[0,\pi] \\ v_1(0,y) &= 0\,, \quad v_1(\pi,y) = 0 \qquad y\in[0,1] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= 0 \qquad \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1) \\ v_2(x,0) &= 0\,, \quad v_2(x,1) = 0 \qquad x\in[0,\pi] \\ v_2(0,y) &= y^2 - y\,, \quad v_2(\pi,y) = 0 \qquad y\in[0,1] \end{aligned}$$

Schritt 3: Lösen der einzelnen Probleme.

Problem 1) haben wir oben gelöst mit dem Ergebnis

$$\boxed{v_1(x,y) = \frac{\pi(e^{-y} - e^{y})}{e^1 - e^{-1}} \sin(x)}$$

Skizze der Lösung von Problem 2) (vgl. auch Vorlesungsfolien 60...)

Produktansatz: $v_2(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ liefert wieder

$$X'' = \lambda X, \quad Y'' = -\lambda Y, Y(0) = Y(1) = X(\pi) = 0$$

Da zwei Randwerte für Y Null sind, fangen wir mit der DGL

$$Y'' = -\lambda Y, Y(0) = Y(1) = 0$$

an und erhalten mit $L = 1$. Nichttriviale Lösungen

$$Y_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}y\right) = \sin(k\pi y), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Die zweite DGL lautet

$$\begin{aligned}
X_k''(x) = k^2\pi^2 X(x) \implies X_k(x) &= A_k e^{-k\pi x} + B_k e^{k\pi x} \\
X_k(\pi) = 0 \implies A_k &= -e^{2k\pi^2} B_k \\
X_k(x) &= B_k(e^{k\pi x} - e^{2k\pi^2} e^{-k\pi x}) \\
&= 2B_k e^{k\pi^2} \left(\frac{e^{k\pi x}e^{-k\pi^2} - e^{k\pi^2}e^{-k\pi x}}{2}\right) \\
&= 2B_k e^{k\pi^2} \sinh(k\pi(x-\pi))
\end{aligned} \tag{1}$$

Superposition:

$$v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(k\pi(x-\pi)) \sin(k\pi y)$$

Zu erfüllen ist noch $v_2(0,y) = y^2 - y$ also

$$v_2(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(-k\pi^2) \sin(k\pi y) = y^2 - y$$

Die Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L = 2-$ periodischen Fortsetzung der rechten Seite lauten:

$$y^2 - y = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi y)$$

$$\beta_k = \frac{2}{L}\int_0^L (y^2 - y)\sin(k\pi y)\,dy \qquad L = 1$$

also nach 2 mal partieller Inegration

$$\beta_k = \frac{4}{(k\pi)^3}(\cos(k\pi) - 1) = \frac{4}{(k\pi)^3}((-1)^k - 1)$$

und damit

$$b_k = \frac{\beta_k}{\sinh(-k\pi^2)} = \frac{4(1-(-1)^k)}{(k\pi)^3 \sinh(k\pi^2)}$$

$$\boxed{v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^k)}{(k\pi)^3 \sinh(k\pi^2)} \sinh(k\pi(x-\pi)) \sin(k\pi y)}$$

Wer lieber mit *exp* arbeitet, läßt die Umformung in sinh nach Gleichung (1) weg und rechnet analog mit den e-Funktionen weiter:

$$v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(e^{k\pi(x-\pi)} - e^{-k\pi(x-\pi)}) \sin(k\pi y), \qquad v_2(0,y) = y^2 - y$$

Ein Vergleich mit den β_k aus der Fourierreihe ergibt:

$$\boxed{v_2(x,y) = \frac{4}{(k\pi)^3} \cdot \frac{1-(-1)^k}{e^{k\pi^2} - e^{-k\pi^2}} (e^{k\pi(x-\pi)} - e^{-k\pi(x-\pi)}) \sin(k\pi y)}$$

Die lösung des ursprünglichen Problems ist $\quad u = u_E + v_1 + v_2$

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Laplace Operator in Polarkoordinaten: $\boxed{\Delta u \,=\, 0 \iff r^2 u_{rr} \,+\, r u_r + \,u_{\phi\phi} \,=\, 0\,.}$

Ansatz: $u(r,\phi) = w(r)\cdot v(\phi)$

Neue Dgl.: $r^2 w'' \cdot v \,+\, r w' \cdot v \,+\, w \cdot v'' \,=\, 0$

Sortieren nach v und w: $v(r^2 w'' \,+\, r w') \,=\, -w \cdot v''$

$$\Longrightarrow \frac{r^2 w'' \,+\, r w'}{w} \,=\, -\,\frac{v''}{v} \,=\, \lambda\,.$$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$\boxed{v''(\phi) \,=\, -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) \,+\, r w'(r) \,-\, \lambda w = 0}$$

v sollte $2\pi-$ periodisch sein, daher kommen nur $\lambda_k = k^2$ und

$$\boxed{v_k(\phi) \,=\, a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

in Frage. Gleichung für die passenden w_k lautet

$r^2 w''(r) \,+\, r w'(r) \,-\, k^2 w = 0$

<u>$k = 0$:</u> $w'' \,=\, -\frac{1}{r} w' \Longrightarrow w' \,=\, \dfrac{d_0}{r} \Longrightarrow \boxed{w_0 = \, c_0 + d_0 \ln(r)\,.}$

<u>$k \neq 0$:</u> Eulersche Dgl.: Substitution $r \,=\, e^t$ oder Ansatz $w(r) \,=\, r^\gamma$ (vgl. DGL 1 Blatt 6 bzw. Klausur)

$-k^2 \cdot r^\gamma + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} + r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} = 0$

$\iff r^\gamma\,(-k^2 + \gamma + \gamma^2 - \gamma) = 0 \iff \gamma = \pm k$

und damit $\boxed{w_k(r) \,=\, c_k r^{-k} \,+\, d_k r^k}$

Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL. Da die Dgl linear ist, ist Jede Lin.Komb. auch eine Lösung

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \,+\, \sum_k (c_k r^{-k} \,+\, d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi))}$$

Beispiel:

$\Delta u \;=\; 0 \qquad$ für $x^2 + y^2 > 9, \qquad u(x,y) = 1 - x^2,$ auf $x^2 + y^2 = 9\,.$

Allgemeine Vorgehensweise auf dem Außenraum $x^2 + y^2 > R^2$ **:**

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k\,.$

Ansatz : $u(r,\phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\,(a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi))$

Randwerte: $u(R,\phi) = u_0(\phi) \qquad$ (hier $u(3,\phi) = 1 - (3\cos(\phi))^2$)

$$u(R,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\,(a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi)) = u_0(\phi)$$

Entwickle u_0 in eine Fourierreihe

$$u_0(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\phi)\cos(k\phi)\,d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\phi)\sin(k\phi)\,d\phi$$

Dann muss gelten

$$R^{-k}a_k = A_k \iff a_k = R^k \cdot A_k, \quad \text{und analog } b_k = R^k \cdot B_k$$

und wir erhalten die Lösung

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi))$$

Zurück zum Beispiel :

RWE: für $R = 3\,:\, u(3,\phi) = 1 - 9\cos^2(\phi) \;=\; 1 - \frac{9}{2}\,(\cos(2\phi) + 1)$

Die Fourierkoeffizienten von u_0 sind

$\frac{A_0}{2} = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}\,, \quad A_2 = -\frac{9}{2}\,, \quad A_K = B_k = 0$ sonst.

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{r}\right)^2 \cos(2\phi)\,.$$

Lösung in kartesischen Koordinaten :

nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{r^2}$

$$u(x,y) = -\frac{7}{2} - \frac{81}{2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

Zusammenfassung

Allgemeiner Ansatz bei Außen–/Innenraum eines Kreises, bei Ringen, bei Kreis-/ Ringsegmenten

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} \;+\; d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \;+\; b_k \sin(k\phi))}$$

Um beschränkte Lösungen zu erhalten setzt man

- im **Innenraum** mit RWE $u(R,\phi) = u_0(\phi)$

  $c_k = 0$ und $d_0 = 0$ und erhält:

  $$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi))$$

- im **Außenraum** mit Randwerten $u(R,\phi) = u_0(\phi)$

  $d_k = 0$ und:

  $$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi))$$

- im **Ring** mit RWE $u(R_1,\phi) = u_1(\phi), \quad u(R_2,\phi) = u_2$

  volle Ansatzfunktion.

  Koeffizienten über die zwei Randbedingungen bestimmen!

- im **(Ring-)Sektor**: Wenn auf mehr als einem Randstück Randdaten $\neq 0$ zerlegt man notfalls, wie beim Rechteck (Beispiel B). Ansatzfunktionen müssen evtl angepasst werden.

  Beispiel: Gebiet:

  $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $0 \le r \le 1$, $-\frac{\pi}{8} \le \phi \le \frac{\pi}{8}$

  Randbedingungen : $u = 0$ für $\phi = \pm\frac{\pi}{8}$.

  und $u(1,\phi) = g(\phi)$.

  Hier muss man im Ansatz

  $w_k(\phi) = A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi)$

  die A_k , die B_k **und die zulässigen** k bestimmen.