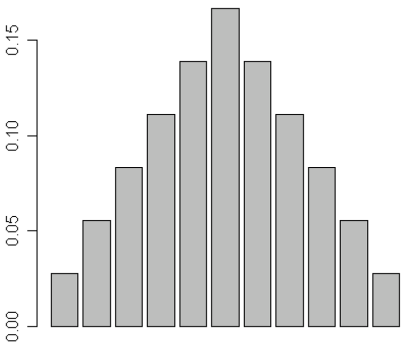
1 Beispiel: Zweimaliges Würfeln

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(p)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$



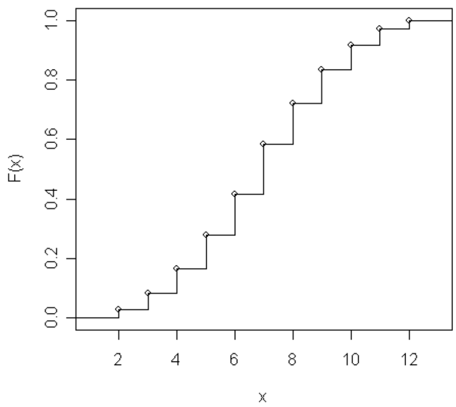


Figure 1: Zähldichte und Verteilungsfunktion für die Augensumme beim zweimaligen Würfeln.

2 Wichtige diskrete Verteilungen

1. **Bernoulli-Verteilung**
   $X \sim Ber(p), p \in [0,1]$
   $C = \{0,1\}, p_0 = 1-p, p_1 = p$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$$

   Momente: $E(X) = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$

2. **Binomialverteilung**
   $X \sim Bin(n,p), p \in [0,1], n \in \mathbb{N}$
   $C = \{0, \ldots, n\}$

$$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$$

   Momente: $E(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
   Interpretation: X = Anzahl der Erfolge in einem n-mal unabhängig wiederholten Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

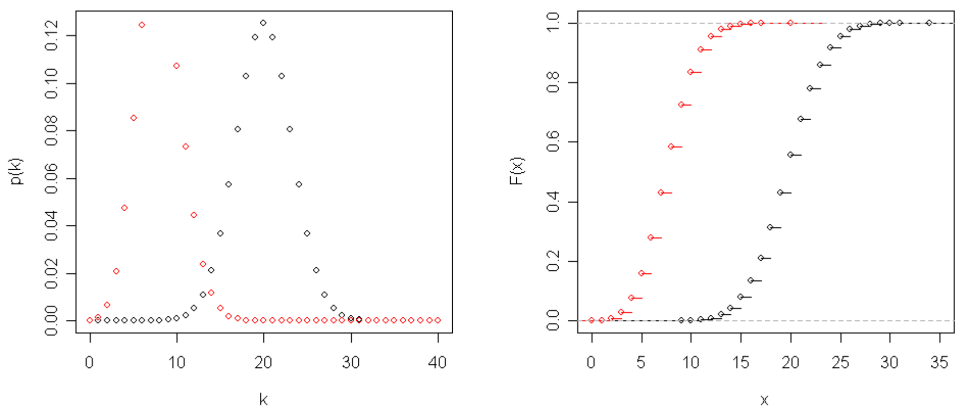


Figure 2: Zähldichte und Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit $n = 40$, $p = 0.5$ (schwarz) und $p = 0.2$ (rot).

3. **Geometrische Verteilung**
   $X \sim Geo(p), p \in [0,1]$
   $C = \mathbb{N}$

$$p_k = P(X = k) = p^{k-1}(1-p), \quad k \in \mathbb{N}$$

   Momente: $E(X) = \frac{1}{1-p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
   Interpretation: X = Anzahl der Versuche (bei unabhängiger Wiederholung) bis zum ersten Erfolg, Erfolgswahrscheinlichkeit $1-p$.

4. **Hypergeometrische Verteilung**
   $X \sim HG(M, S, n), M, S, n \in \mathbb{N}, n \leq M$
   $C = \{0, 1, \ldots, \min\{n, S\}\}$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{M-S}{n-k}}{\binom{M}{n}}, \quad k \in C$$

   Momente: $E(X) = n\frac{S}{M}$, $\mathrm{Var}(X) = n\frac{S}{M}\left(1 - \frac{S}{M}\right)\frac{M-n}{M-1}$
   Interpretation: X = Anzahl der schwarzen Kugeln bei n Entnahmen aus einer Urne mit S schwarzen und $M - S$ weißen Kugeln.

5. **Gleichverteilung**
   $X \sim U\{x_1, \ldots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$
   $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$$p_k = P(X = x_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n$$

   Momente: $E(X) = \overline{x}_n$, $\mathrm{Var}(X) = \overline{x^2}_n - \overline{x}_n^2$
   Interpretation: Laplacesche Verteilung

6. **Poisson-Verteilung**
$X \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$
$C = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$p_k = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 1, \ldots, n$$

Momente: $E(X) = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$

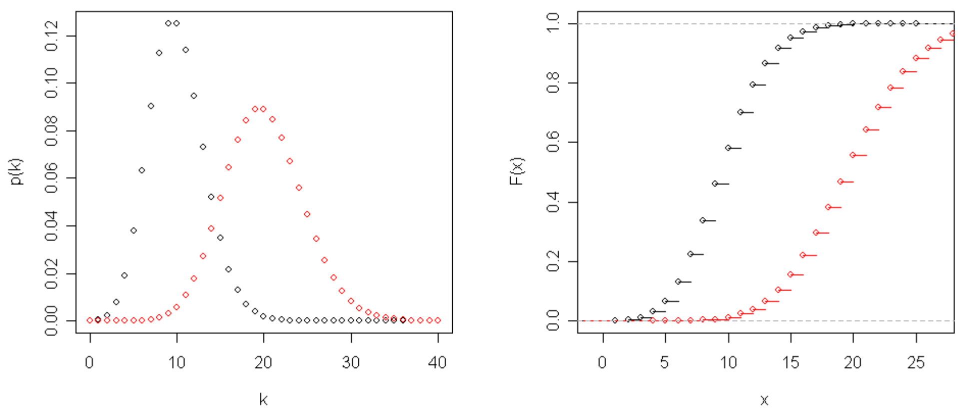


Figure 3: Zähldichte und Verteilungsfunktion der Poissonverteilung mit $\lambda = 10$ (schwarz) und $\lambda = 20$ (rot).

3 Wichtige absolut stetige Verteilungen

1. **Normalverteilung**
   $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

   $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

   Momente: $E(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
   Spezialfall: Standardnormalverteilung: μ=0, σ=1
   Verteilungsfunktion nicht analytisch berechenbar.

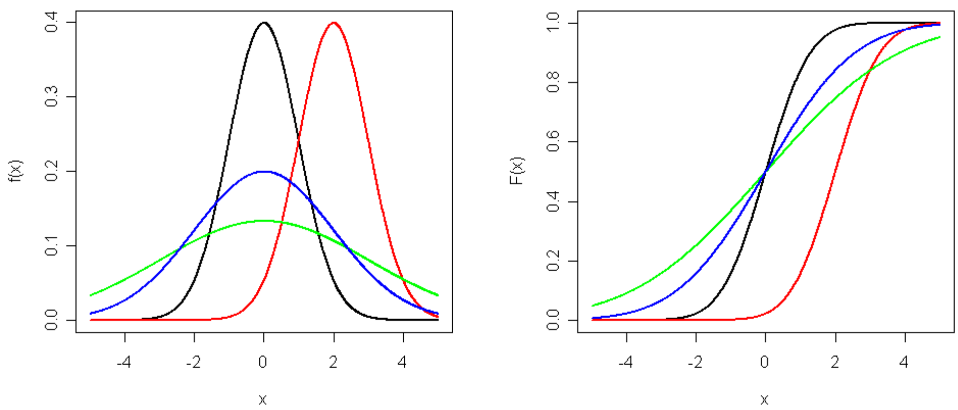


Figure 4: Dichte und Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit $\mu = 0, \sigma = 1$ (schwarz), $\mu = 2, \sigma = 1$ (rot), $\mu = 0, \sigma = 2$ (blau) und $\mu = 0, \sigma = 3$ (grün).

2. **Gleichverteilung**
$X \sim U[a,b], a,b \in \mathbb{R}, a < b$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Momente: $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

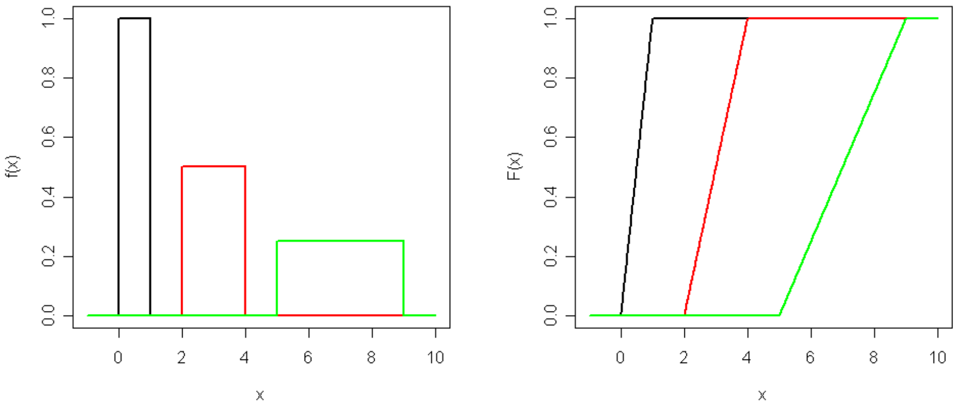


Figure 5: Dichte und Verteilungsfunktion der Gleichverteilung mit $a = 0, b = 1$ (schwarz), $a = 2, b = 4$ (rot) und $a = 5, b = 9$ (grün).

3. **Exponentialverteilung**
   $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Momente: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
   Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

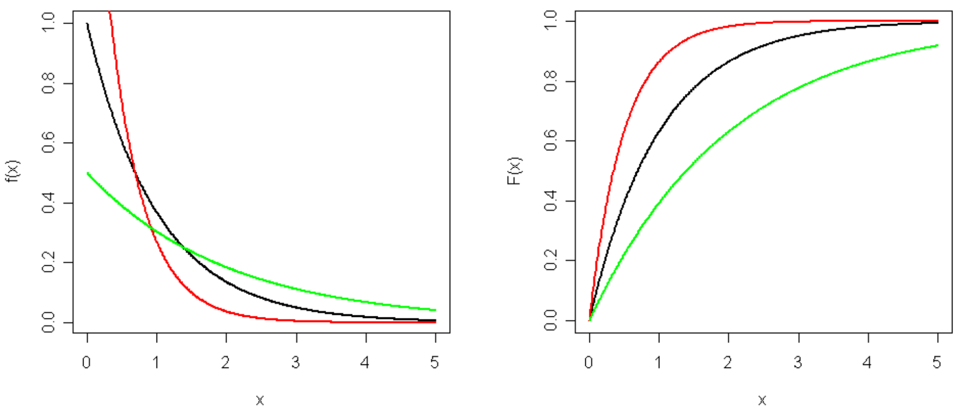


Figure 6: Dichte und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit $\lambda = 1$ (schwarz), $\lambda = 2$ (rot) und $\lambda = 0.5$ (grün).

4 Mischungen

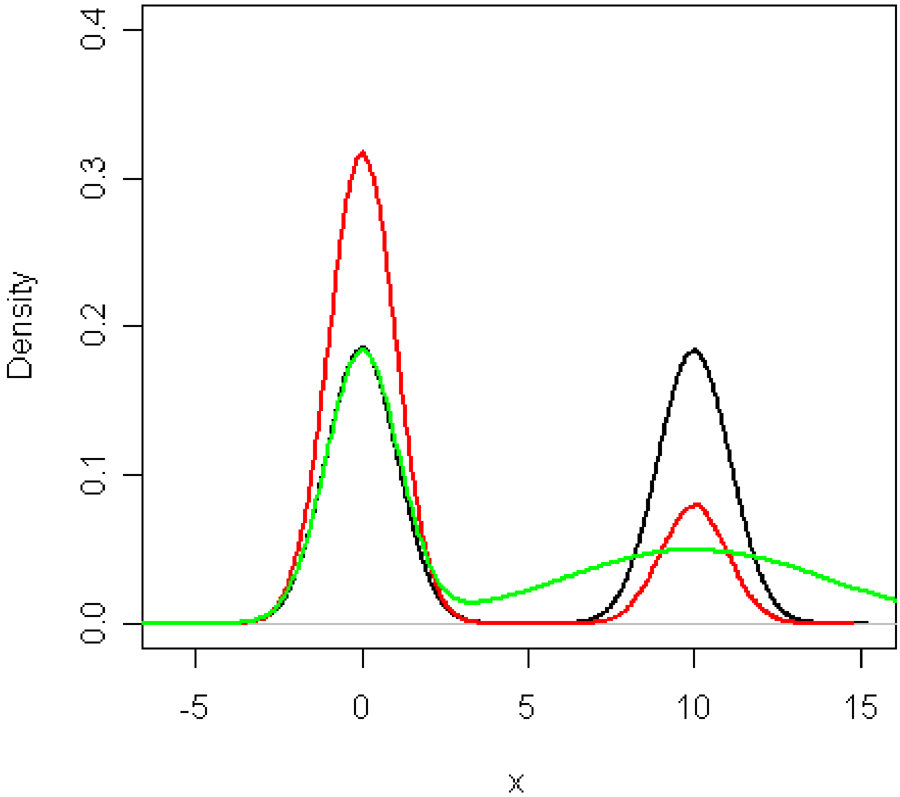


Figure 7: Dichte und Verteilungsfunktion von Mischungen von Normalverteilungen mit $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\mu_2 = 10$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ (schwarz), $\mu_2 = 10$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.2$ (rot) und $\mu_2 = 10$, $\sigma_2 = 4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ (grün).

5 Verteilungen von Zufallsvektoren

1. **Multivariate Normalverteilung**
   $X \sim N(\mu, K), \mu \in \mathbb{R}^n, K$ positiv definite $n \times n$-Matrix

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T K^{-1}(x-\mu)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

   $n = 2$:

$$\mu = (\mu_1, \mu_2), K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2} 2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

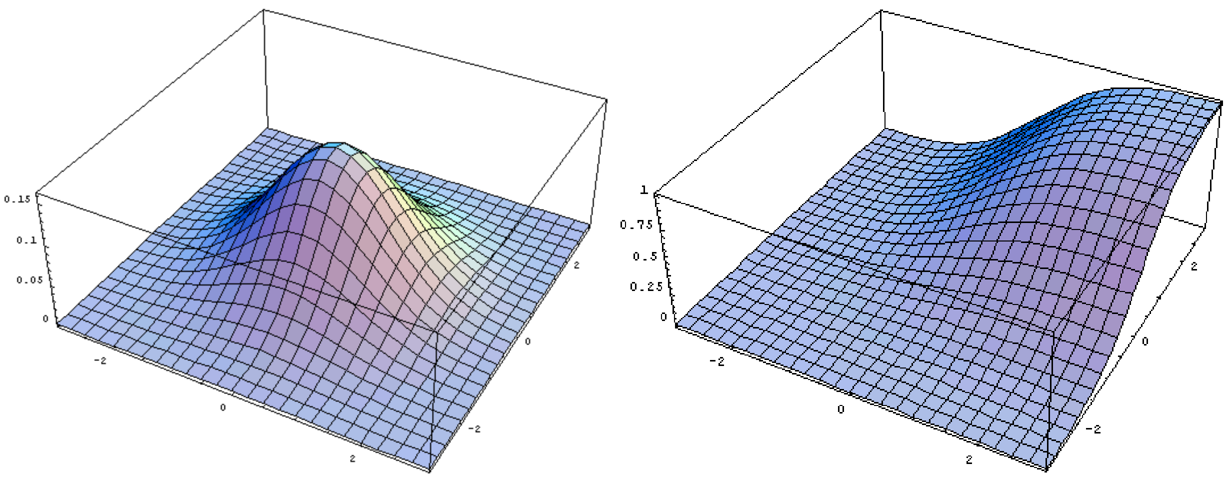


Figure 8: Dichte und Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

2. **Gleichverteilung**
   $X \sim U(B), B \subset \mathbb{R}^n$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{|B|} & x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

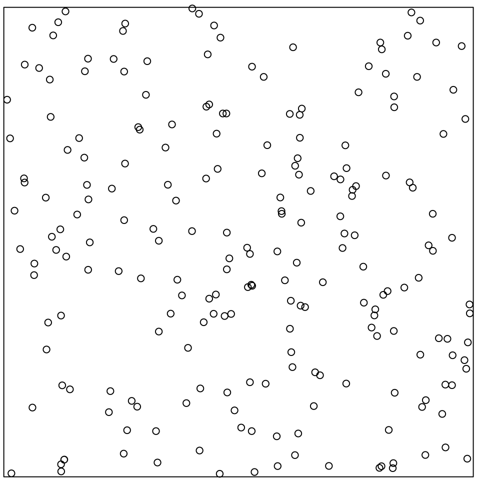


Figure 9: Koordinaten zufälliger Punkte mit Gleichverteilung auf einem Quadrat.