Technische Universität Berlin **Sommersemester 2017**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: L. Bianchi, R. Nabben Ausgabe: 05.05.2017
Ass.: S. Keiper, M. Radons Abgabe: 15.05.-19.05.2017

2. Übungsblatt
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

(Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Teilräume)

Das Lösen der schriftlichen Hausaufgaben ist eine wichtige Vorbereitung für die schriftliche Klausur. Auch wenn die Abgabe in Dreier- und Vierergruppen erfolgen darf, sollte jedes Gruppenmitglied an der Formulierung der Lösungen beteiligt sein, denn auch die Klausur muss jedes Gruppenmitglied selber lösen. Sowohl die Klausur als auch die Hausaufgaben werden nach folgenden vier Kriterien bewertet:

1. **Die Aufgabestellung wurde verstanden.** (Überlegen Sie sich, was Sie zeigen sollen.)
2. **Eine passende Lösungsstrategie wurde durchgeführt; die rechnerischen Details/ nötigen Schlussfolgerungen wurden richtig und verständlich dargestellt.** (Nun können Sie anfangen zu rechnen und die Aufgabenstellung zu bearbeiten.)
3. **Die Fragestellung wurde vollständig beantwortet.** (Geben Sie einen Antwortsatz an.)

Hausaufgaben

1. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

   Gegeben sei die folgende Teilmenge des $\mathbb{C}^3$:

$$T_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_3 = 4x_2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

   (a) Zeigen Sie, dass T_1 ein Teilraum des $\mathbb{C}^3$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2i \\ i \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

   linear unabhängig ist und ein Erzeugendensystem von T_1 bildet. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von T_1?

   (c) Bestimmen Sie die Dimension von T_1.

2. **Aufgabe** **(2 Punkte)**

   Gegeben sei die folgende Teilmenge des $\mathbb{C}^3$:

$$T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 2 \cdot x_3^2 = 4 \cdot x_2^2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

   Ist T_2 ein Teilraum des $\mathbb{C}^3$?

3. **Aufgabe** **(4 Punkte)**

Wählen Sie aus der folgenden Menge zwei verschiedene Basen des $\mathbb{R}^2$ aus:

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. **Aufgabe** **(5 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Dimension des Teilraums

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} -ia \\ a \\ 3a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

(b) Ist $\mathbb{C}^3$ ein Teilraum des $\mathbb{C}^5$?

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

Tutoriumsvorschläge

1. **Aufgabe**

   Gegeben seien die Vektoren:

$$\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v}_5 := \begin{bmatrix} 3 - i \\ 12 - 4i \end{bmatrix}, \vec{v}_6 := \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_7 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Welche der Vektoren können addiert werden? In welchem Raum wird dies gemacht?

   (b) Bestimmen Sie $\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_6$.

   (c) Fertigen Sie eine Skizze der Mengen $M_1 := \{\alpha\vec{v}_2 | \alpha \in \mathbb{R}\}$, $M_2 := \text{span}\{\vec{v}_3\}$, $M_3 := \text{span}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ in der Ebene an.

   (d) Sind die Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear abhängig?

   (e) Schreiben Sie die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^2$ als eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.

   (f) Schreiben Sie $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ als eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.

   (g) Bestimmen Sie die lineare Hülle (oder Spann) von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ in $\mathbb{R}^2$.

   (h) Welche der folgenden Mengen sind Basen des $\mathbb{R}^2$: $\{\vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_4\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$

   (i) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_6, \vec{v}_7\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   (j) Welche Basis hat der Vektorraum $\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^3$?

2. **Aufgabe**

   (a) Was sind geometrisch betrachtet die Teilräume des $\mathbb{R}^2$? des $\mathbb{R}^3$?

   (b) Untersuchen Sie anhand der Definition eines Teilraums, ob

$$M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_2 = -2x_1 \right\}$$

   ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

   (c) Ist $M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_2 \cdot x_1^2 = 0 \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$?

3. **Aufgabe**

   (a) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, das keine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, an.

   (b) Sind alle Basen Erzeugendensysteme? Sind alle Erzeugendensysteme Basen?

   (c) Gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ mit 2 Elementen? Mit 4 Elementen?

   (d) Bilden drei beliebige Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   (e) Bestimmen Sie $\dim(\text{span}(M))$ für $M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Ist M eine Basis des $\mathbb{R}^3$?