Mathematik 1 für Vermessung und Geoinformation **Übungsblatt 1** 19.10.2016

1. (a) Fertigen Sie eine Wahrheitstafel für die folgenden Ausdrücke an:

   (i) $(\neg A \wedge B)$ (ii) $\neg(A \Rightarrow B)$

   (b) Verifizieren Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel die folgenden Äquivalenzen:

   (i) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ (ii) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

2. Gegeben sind die folgenden Aussagen:

   (a) $\forall x \in \mathbb{N}_0\ \exists y \in \mathbb{N}_0\colon x + y > 1$
   (b) $\exists x \in \mathbb{N}_0\ \exists y \in \mathbb{N}_0\colon x + y > 1$
   (c) $\forall x \in \mathbb{N}_0\ \forall y \in \mathbb{N}_0\colon x + y > 1$
   (d) $\forall x \in \mathbb{N}_0\ \exists y \in \mathbb{Z}\colon x + y > 1$

   Beantworten Sie die folgenden Fragestellungen:

   (i) Sind die Aussagen (a) – (d) wahr oder falsch?
   (ii) Was ändert sich am Wahrheitsgehalt der Aussagen, wenn man $x + y > 1$ durch $x + y \geq 1$ ersetzt?
   (iii) Was ändert sich am Wahrheitsgehalt der Aussagen, wenn man $x + y > 1$ durch $x + y \geq 0$ ersetzt?
   (iv) Was ändert sich am Wahrheitsgehalt der Aussagen, wenn man $x \in \mathbb{N}_0$ und $y \in \mathbb{N}_0$ durch $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$ in den Aussagen (a) – (c) ersetzt?
   (v) Wie lauten die negierten Aussagen zu (a) – (d)?

3. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$

   (a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

   mittels vollständiger Induktion.

4. Ermitteln Sie die Summe
$$\sum_{k=1}^{n} (k^3 - 2k + 1)$$
   und beweisen Sie diese Identität dann mit Hilfe der vollständigen Induktion.
   Hinweis: Beispiel 3 (a) und Vorlesung

5. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 4$ die Gültigkeit der Aussage
$$n^2 \leq 2^n.$$

6. Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert, d.h. mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ gilt
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$
   für $n \geq 2$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$
$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$
   gilt.

7. Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Summenformel die folgenden Summen:

(a) $\sum_{\ell=0}^{30} 2^\ell$ (b) $\sum_{n=10}^{40} 3^{-n}$ (c) $\sum_{k=30}^{60} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$

8. Berechnen Sie mittels des binomischen Lehrsatzes die folgenden Summen für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k x^{n-k}$ (c) $\sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-m-1} 2^m$

(b) $\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{n-\ell} (-1)^\ell$ (d) $\sum_{n=1}^{k} \binom{k}{n}$

Hinweise: Verwenden Sie Rechenregeln für Potenzen, sowie für den Binomialkoeffizienten und die Tatsache, dass $1^k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

9. (a) Berechnen Sie von $(x-2y)^{24}$ den Koeffizienten der Summanden $x^{11}y^{13}$ sowie $x^{10}y^{12}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

   (b) Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz zur Berechnung der Koeffizienten von $x^3y^7z^{12}$ und $x^{10}y^6z^4$ in $(x - 2y + 2z^2)^{16}$.

   Hinweis zu (b): Für einen Ausdruck mit drei Summanden der Form $(a + b + c)^n$ kann der binomische Lehrsatz zweimal gemäß $((a + b) + c)^n$ angewandt werden.

Bemerkung. Sie finden online mehr Beispiele zum Üben von Beispielen des Typs der Beispiele 7 und 8 auf diesem Übungsblatt. Sie können dort Ihre Rechenfertigkeiten stärken und sich auf die Klausur vorbereiten.