Lineare Algebra, Übung 10

1) Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Es seien $v_1, \ldots, v_m \in V$. Wir nehmen an, dass $f(v_1), \ldots, f(v_m) \in W$ linear unabhängig sind. Man beweise, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

2) Es sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
a) f ist ein Isomorphismus, b) f ist injektiv, c) f ist surjektiv.

3) Es sei W ein K-Vektorraum. Es seien $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n \in W$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$f : K^n \to W,$$

so dass $f(e_i) = \underline{s}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Eine Relation zwischen den Vektoren $\underline{s}_i$ ist nach Definition ein Vektor $\underline{x} = (x_i) \in \operatorname{Ker} f \subset K^n$. Anders ausgedrückt ist eine Relation, der Vektor $\underline{x}$ aus den Koeffizienten x_i einer Gleichung

$$x_1\underline{s}_1 + x_2\underline{s}_2 + \ldots + x_n\underline{s}_n = 0.$$

Es sei $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_r$ ein Basis von $\mathcal{L}(\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n)$. Dann finden wir für alle $n \geq j > r$ eine Gleichung der Form:

$$(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij}\underline{s}_i) + \underline{s}_j = 0, \qquad \text{wo } \lambda_{ij} \in K.$$

Es sei ρ_j, $j = r+1, \ldots, n$ der Vektor aus den Koeffizienten dieser Gleichung.

Man beweise, dass die Vektoren ρ_j, $j = r+1, \ldots, n$ eine Basis der Vektorraums $\operatorname{Ker} f$ bilden.

4) Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Es seien $W_1, \ldots, W_m$ Unterräume von V. Wir definieren

$$W_1 + \ldots + W_m = \{w_1 + \ldots + w_m \mid w_i \in W_i\}.$$

Man beweise, dass $W_1 + \ldots + W_m$ ein Unterraum von V ist.

Es sei $W_1 + \ldots + W_m = V$ und $\sum_{i=1}^{m} \dim W_i = \dim V$. Man beweise, dass es disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m$ gibt, so dass $B_i \subset W_i$ eine Basis von W_i ist und so dass die Vereinigung $B_1 \cup \ldots \cup B_m$ eine Basis von V ist. (disjunkt bedeutet, dass $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.)

Abgabe bis Donnerstag, 23.6.2016, 14:00