Übungsblatt 7

Abgabe: 05. Juni 2018, 09:15 Uhr

Aufgabe 1: Differentiation von parameterabhängigen Integralen (12=5+5+2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(y) := \int_0^1 f(x,y)dx$, differenzierbar ist und bestimmen Sie $I'(y)$.

b) Geben Sie $I^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I^*(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, an und bestimmen Sie $I^*(0)$.

c) Es gilt $I'(0) \neq I^*(0)$. Wie können Sie dies mit Satz 3.10 in Einklang bringen?

Aufgabe 2: Parameterabhängige Integralgrenzen (13 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Ferner sei $f : J \times U \to \mathbb{R}$ stetig und bezüglich der zweiten Variable stetig partiell differenzierbar. Seien $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf U und es gelte $\alpha(U), \beta(U) \subseteq J$. Definieren wir $I : U \to \mathbb{R}$ durch

$$I(y) := \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,$$

dann ist I auch U differenzierbar und es gilt für alle $y \in U$

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \partial_y f(x,y)dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y).$$

Hinweis: *Stellen Sie I als Verkettung der Funktionen $\Phi(u,v,y) := \int_u^v f(x,y)dx$ und $h(y) := (\alpha(y), \beta(y), y)$ für $u, v \in J$ und $y \in U$ dar und verwenden Sie die Kettenregel.*

Aufgabe 3: Das Gaußsche Integral (15=7+3+5 Punkte)

Wir wollen $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ berechnen. Dazu definieren wir $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{-1}^{1} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad \text{sowie} \quad G(x) := \left(\int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt \right)^2.$$

a) Zeigen Sie, dass F und G differenzierbar sind und für alle $x \in (0, \infty)$ die Identität $F'(x) = -\frac{1}{2}G'(x)$ erfüllen. Zeigen Sie ferner, dass $F + \frac{1}{2}G \equiv \frac{\pi}{2}$ auf $[0, \infty)$ konstant ist.

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.

c) Berechnen Sie nun $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass* $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x)$ *für* $x \geq 0$ *gilt.*

Präsenzaufgabe 4: Oberfläche eines Rotationskörpers

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Machen Sie sich klar: Die Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph von φ um die x-Achse gedreht wird, ist gegeben durch

$$A(\varphi) := 2\pi \int_a^b \varphi(t)\sqrt{1 + \varphi'(t)}dt.$$

Präsenzaufgabe 5: Ein Rechentrick

Bestimmen Sie das Integral $\int_0^c t^2 \cos(t)dt$, **ohne** partielle Integration zu verwenden.

Anleitung: *Definieren Sie die Funktionen* $f : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times [0, c] \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x, t) := \cos(xt)$ *und* $F : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \to \mathbb{R}$ *durch* $F(x) := \int_0^c f(x, t)dt$*. Zeigen Sie dann, dass* $\int_0^c t^2 \cos(t)dt = -F''(1)$*.*

Viel Erfolg!