# Folgen

## Definition (Folge)

*Eine Abbildung*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

*heißt Folge. Mit*

$$a_n := a(n)$$

*bezeichnen wir das n-te Folgenglied und verwenden für die Folge selber die Notation*

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

## Beispiel

$$\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}}_{a_n} \qquad \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} \qquad \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_2} \qquad \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_3} \qquad \underbrace{\frac{4}{5}}_{a_4} \qquad \ldots$$

## Definition (Grenzwert)

*Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt <u>Grenzwert</u> der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, falls gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \ n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

*Wir schreiben dann*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

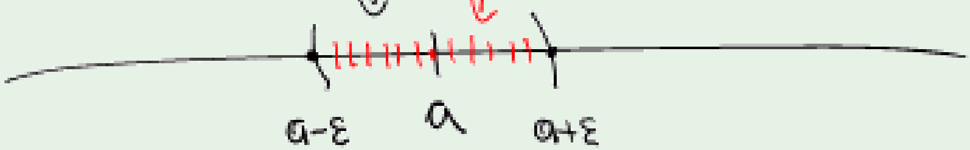
*oder*

$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

## Beispiel

$I_\varepsilon := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) =$ "alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \varepsilon$"

$a_n \in I_\varepsilon$ für $n \geq N$



## Beispiel

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge mit $a_n := \frac{n+1}{n}$. Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon.$$

Dazu: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \geq$ ??? Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n \geq N$ folgt

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N} \end{aligned}$$

## Beispiel

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge mit $a_n := \frac{n+1}{n}$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon.$$

Dazu: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$ . Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n \geq N$ folgt

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N} \\ &< \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

## Beispiel

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge mit $a_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Dazu: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N >$ ??? Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n \geq N$ folgt

$$\begin{aligned}
|a_n - 0| &= |\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}| \\
&= \left| (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \right| \\
&= \left| \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right| \\
&= \left| \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

## Beispiel

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge mit $a_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Dazu: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$ . Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n \geq N$ folgt

$$\begin{aligned}
|a_n - 0| &= |\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}| \\
&= \left| (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \right| \\
&= \left| \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right| \\
&= \left| \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hilfreiche Formeln zum Lösen von Folgenkonvergenzaufgaben:

## Proposition (Binomische Formeln)

*Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \quad \text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{2}$$

$$(a^n - b^n) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} \tag{3}$$

## Beispiel

Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.

Bew. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N = \max\left(4,\ 16 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}\right)$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n > N$ folgt:

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \left| \frac{(\sqrt[n]{n})^n - 1^n}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{n})^k \cdot 1^{n-1-k}} \right| = \frac{|n-1|}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{n})^k} \leq \frac{|n-1|}{\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} (\sqrt[n]{n})^k}$$

da $n \geq 4$ und somit $\frac{n}{4} \geq 1$.

$$\leq \frac{|n-1|}{\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}}} = \frac{|n-1|}{\left(n-1-\frac{n}{2}\right)(\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}}} = \frac{n-1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\sqrt{n}} \leq \frac{n}{\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{4}\right)\cdot\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n}{\frac{n}{4}\cdot\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}} < \frac{4}{\sqrt{N}} \leq \frac{4}{\sqrt{\frac{16}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon \qquad \square$$

$$(\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}} + (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}} + \cdots + (\sqrt[n]{n})^{\frac{n}{2}}$$

## Satz (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

*Sind $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, dann gilt $a = b$.*

## Beweis.

Angenommen $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := |a - b| > 0$. Somit gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{und} \qquad & \forall n \in \mathbb{N}: \; n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Wir fixieren nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - a_n + a_n - b| \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |a - b|. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Es folgt $a = b$. □

## Definition

*Besitzt* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *einen Grenzwert, so heißt* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergent.*

*Besitzt* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *keinen Grenzwert, so heißt die Folge divergent.*

## Satz (Grenzwertsätze)

*Seien* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *und* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

*Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(c a_n) = ca \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ eine Konstante}), \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad (\text{falls } b \neq 0). \tag{7}$$

## Beispiel

Zu bestimmen: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2n^2+3n^3}{4n^3+5n^2+6n}$

Lsg.:

$$\frac{n+2n^2+3n^3}{4n^3+5n^2+6n} = \frac{\frac{1}{n^2}+2\cdot\frac{1}{n}+3}{4+5\cdot\frac{1}{n}+6\cdot\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0+3}{4+0+0} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\text{Bem.: } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{für } k\in\mathbb{N}.}$$

## Definition (Beschränktheit)

*Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* *beschränkt, falls*

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le S.$$

*Die Folge heißt* *nach oben beschränkt, falls*

$$\exists S_o \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \le S_o.$$

*Die Folge heißt* *nach unten beschränkt, falls*

$$\exists S_u \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : S_u \le a_n.$$

## Definition (Nullfolge)

*Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *heißt* *Nullfolge.*

## Satz

a) *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

b) *Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt, dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

## Beweis.

a) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konv. Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. D.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Betrachte $\varepsilon = 1$. Wähle $N$ s.d. $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Dann gilt für $n > N$:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| = 1 + |a|$$

Es folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq \overbrace{\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1+|a|\}}^{= S \text{ obere Schranke}}$$

$\square$

## Satz (Einschließungskriterium / Sandwich-Lemma)

*Seien* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *und* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

*Gilt für eine Folge* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\exists N \in \mathbb{N}: \ n \geq N \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n,$$

*so ist*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$

## Proposition

*Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \tag{8}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < x: \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1, \tag{9}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \tag{10}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x < 1: \quad \lim_{n\to\infty} x^n = 0, \tag{11}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1 < x: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0, \tag{12}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < x: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{14}$$

## Beweis.

Beh: Sei $x \geq 1$. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$

Bew:

Wähle $N \geq x$. Für $n > N$ gilt:

$$\underbrace{1}_{a_n} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{N} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{b_n}$$

$$a_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad b_n = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Nach Sandwich-Lemma folgt $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $n\to\infty$. $\square$

# Beispiel

Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+7} = 1$

Bew:

für $n \geq 7$

$$1 \leq \sqrt[n]{n^2+7} \leq \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2$$

$$\to 1 \cdot 1$$

Also folgt $\sqrt[n]{n^2+7} \to 1$ für $n \to \infty$.