10 Das Anstoß-Problem

10.1 Einleitung

Wieder so ein unangenehmes Silvester, an dem man sich um Mitternacht so schrecklich viel für das neue Jahr vornimmt. Aber die Vorhaben des alten Jahres sind ja noch längst nicht abgearbeitet. Man sitzt und grübelt schon, wie man die Situation am besten meistert, wenn man gleich mit all den anderen anstößt und jemand die erste Rakete steigen lässt.

Da kommt die fundamentale Idee, die die ganze Party schmeißt. Wir stellen einfach mal die Frage in den Raum.

„Hier sind 30 Leute beisammen. Gleich will und soll jede(r) mit jede(rm) anderen anstoßen. Wie oft klingelt es dann? Da werden sicher einige Stirne in Falten gelegt. Das klingt doch so einfach. Na, vielleicht 30 mal. Aber jede(r) mit jede(rm) anderen, heißt vielleicht 60 mal? Aber man stößt ja nicht mit sich selber an, also nur 59 mal?

Nun, als Mathematiker oder Mathematikerin macht man das gleich in einer großen Allgemeinheit.

10.2 Die Aufgabe

Anstoßproblem

Wenn N Menschen zusammenstehen und jeder mit jedem anderen mit seinem Glas anstößt, wie oft klingelt es dann?

Jetzt gehen wir die Sache mal logisch an.

1. Wenn nur ein Mensch im Raum ist, so stößt er mit niemanden an, sondern trinkt seinen Frust allein herunter.

2. Sind zwei da, so klingelt es einmal. Wieviel Spannung da sonst noch knistern mag, lassen wir außer acht, wir wollen ja nur Mathematik betreiben.
3. Bei drei Menschen denken wir so: Zu zweien kommt noch ein dritter hinzu, der muss dann mit den beiden anderen anstoßen, also noch zweimal zusätzlich zu dem einen Mal der ersten beiden. Das macht zusammen
$$1 + 2 = 3.$$
4. Jetzt sind wir mutig und betrachten vier Menschen. Denken wir uns drei schon da, für die es 3 mal geklingelt hat. Der vierte kommt hinzu und muss mit den drei anderen anstoßen, also zusammen
$$1 + 2 + 3 = 6.$$
5. Jetzt wird es klarer. Bei fünf Personen sind es
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
Klingeltöne.

Aber jetzt kommt der Mathematiker:

Wie oft klingelt es bei N Personen?

Na, klingelt's? Richtig, bei N Personen sind es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (N - 1).$$

Man muss also nur immer Zahlen addieren. Jetzt kommt die heißeste Kiste für den Mathematiker. Gibt es für diese Operation vielleicht eine einfache Formel?

Versuchen wir, uns an diese Geschichte mit einem Beispiel heranzupirschen. Was sagen Sie zu folgender Frage:

Wie groß ist die Summe der ersten 100 Zahlen, also $1 + 2 + \cdots + 100$?

Das ist die berühmte Frage, die seinerzeit ein Lehrer dem kleinen Carl Friedrich[1] gestellt hat, um ihn eine Weile zu beschäftigen. Damals war es üblich, dass Lehrer mehrere Klassenstufen zugleich unterrichteten. Das geschah dadurch,

[1] Gauß, C.F. (1777 – 1855)

dass man Teilen der Schüler längere Aufgaben stellte, die sie selbstständig lösen mussten, während der Lehrer mit den anderen Schülern weiter arbeitete. Hier aber hatte er die Rechnung ohne Carl Friedrich gemacht. Der löste die Aufgabe im Handumdrehen („Die Summe ist 5050!“) und nervte den Lehrer weiter.

Wie hat er das gemacht? Nun, vielleicht ist das ganze ja nur eine Anekdote und entspricht nicht der historischen Wahrheit; aber wir können doch einen recht einfachen Weg aufzeigen, wie man die hundert Zahlen im Kopf addiert. Ob Gauß das damals so gemacht hat, weiß heute niemand mehr.

Wir teilen die hundert Zahlen in vier Blöcke. Der erste reicht von 1 bis 49, der zweite enthält nur die 50, der dritte geht von 51 bis 99 und der vierte enthält nur die 100. Den ersten und den dritten Block schreiben wir nebeneinander, beginnen aber den dritten Block von oben nach unten

$$\begin{array}{rr} 1 & 99 \\ 2 & 98 \\ \vdots & \vdots \\ 48 & 52 \\ 49 & 51 \end{array}$$

Unser Falkenauge sieht sofort, dass hier in jeder Zeile als Summe 100 herauskommt. Das sind 49 mal 100. Dann ist da noch die 100 vom 4. Block. Also sind das 50 mal 100, also 5000. Jetzt schwirrt nur noch die 50 vom 2. Block einsam durch die Gegend. Addieren wir sie schnell, so erhalten wir 5050 als Gesamtsumme der Zahlen von 1 bis 100. Genial einfach!

Können wir das verallgemeinern?

Wir haben doch die hundert Zahlen in vier Blöcke geteilt, indem wir quasi bei der Hälfte einen Schnitt gelegt haben. Nehmen wir an, dass die Endzahl gerade ist, hier 100; dann ist die Hälfte 50. Dann haben wir gesehen, dass sich 50 mal die Summe 100 ergab, indem wir die Blöcke geschickt nebeneinander geschrieben haben; also allgemein

$$\frac{n}{2} \cdot n.$$

Dazu mussten wir noch unser einsames Mittelelement $n/2$ addieren, also ergibt sich die Formel

$$\Sigma = \frac{n}{2} \cdot n + \frac{n}{2}.$$

Das sieht nach einer geschickten Formel aus, die wir noch wesentlich einfacher schreiben können als

$$\Sigma = \frac{n}{2} \cdot n + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

was Sie hoffentlich leicht nachvollziehen können. Diese Formel haben wir uns überlegt, wenn n eine gerade Zahl ist. Dann konnten wir ja die Mittelzahl finden. Wie ist es bei ungeradem n?

Wir behaupten jetzt frech, dass unsere Formel immer richtig ist, auch für ungerade Zahlen, also

Theorem 10.1

Für die Summe $1 + 2 + \cdots + n$ ergibt sich stets

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Das ist eine ganz schön lockere Behauptung. Es soll ja schließlich für alle natürlichen Zahlen, also für unendlich viele Zahlen richtig sein. Und das ist eine verdammt große Zahl. Mathematiker haben sich da ein feines Verfahren ausgedacht, wie man solche Formeln beweist.

10.3 Vollständige Induktion

Wir beginnen mit einem nicht so ernst gemeinten Beispiel:

> **Behauptung:** *60 ist durch alle Zahlen teilbar.*

Probieren wir es mal wie ein Physiker:

> 60 ist durch 2 teilbar, ok.
> 60 ist durch 3 teilbar, auch ok.
> 60 ist durch 4, durch 5 durch 6 teilbar.
> 60 ist durch 7, nee, das ist vielleicht ein Messfehler.
> Machen wir noch eine Probe zur Sicherheit:
> 60 ist durch 10 teilbar.
> Alles klar. Bis auf einen Messfehler keinen Widerspruch gefunden.

Ja, so lästern Mathematiker!

Bei folgender Behauptung hat man schon etwas mehr Arbeit:

> **Behauptung:** *Die Funktion*
>
> $$f(x) = x^2 - x + 41$$
>
> *liefert für jede natürliche Zahl x eine Primzahl.*

Beispiele zeigen:

$f(3) = 47$ ist eine Primzahl.
$f(10) = 131$ ist eine Primzahl.
$f(20) = 421$ ist auch eine Primzahl.

Wir verraten es Ihnen. Da müssen sie ganz schön Geduld haben. Bis zur Zahl 40 kommen immer Primzahlen heraus. Erst die Zahl 41 macht die Behauptung kaputt:

$$f(41) = 41 \cdot 41 - 41 + 41 = 41 \cdot 41$$

So geht das also nicht. Kein Problem, sich Fragen auszudenken, wo Sie sehr lange arbeiten müssten, um einen Widerspruch zu entdecken. Das berechnen einzelner Beispiele ist manchmal amüsant, hat aber keinen Beweischarakter. Es taugt höchstens, wenn man nach einem Gegenbeispiel fahndet.

Wir brauchen ein vollständiges Prinzip zur Beweisführung. Das Berechnen einzelner Beispiele taugt zu nichts. Hier hilft die vollständige Induktion.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion hört sich reichlich apokryph an. Eine Formulierung könnte so lauten:

Prinzip der vollständigen Induktion:

> *Wenn eine Aussage für $k = 1$ richtig ist und wenn aus der Richtigkeit für eine natürliche Zahl k (Induktionsvoraussetzung) stets die Richtigkeit für den Nachfolger $k + 1$ folgt, dann ist die Aussage für jede natürliche Zahl richtig.*

Das ist eigentlich nicht so schwer zu verstehen. Wenn ich etwas für $k = 1$ weiß und stets beweisen kann, dass es für den Nachfolger gilt, so gilt es also für 2 und dann für 3 und dann für 4 usw. Also gilt es für alle natürlichen Zahlen.

Zwei Punkte müssen wir also bearbeiten:

1. Wir müssen einen Anfang finden, für den unsere Behauptung richtig ist: Induktionsanfang.
2. Wir müssen den allgemeinen Schluss von k auf $k + 1$ vollziehen: Induktionsschluss.

Dass wir ohne den Induktionsschluss nicht auskommen, zeigen unsere Beispiele oben.

Betrachten Sie mit mir die Behauptung: Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe, nämlich die meine. Entschuldigen Sie diesen Egoismus, aber vielleicht senden Sie mir ein Büschel Ihrer Haare, dann nehme ich Sie bei der nächsten Auflage als Paradebeispiel.

Als Induktionsanfang nehmen wir die Menge, die nur aus mir selbst besteht. Alle Menschen dieser Menge haben dann meine Haarfarbe.

Setzen wir jetzt voraus, die Behauptung sei richtig für eine Menge mit k Menschen. Dann nehmen wir eine Menge mit $k + 1$ Menschen. Ohne große Einschränkung können wir annehmen, dass ich unter diesen Menschen bin. Dann werde ich einfach aus dieser Menge rausgeworfen, und es bleibt eine Menge von k Menschen übrig, die nach Induktionsvoraussetzung alle meine Haarfarbe besitzen. Also haben auch die $k + 1$ Menschen, wenn ich wieder in den Kreis hinein darf, alle meine Haarfarbe. Und der „Beweis“ ist vollbracht.

Unser Fehler liegt hier im Induktionsanfang. Wir wollen doch Menschen vergleichen. Da reicht es nicht, nur einen, nämlich mich selbst zu betrachten. Sobald ich aber eine Menge mit zwei Menschen, wovon einer ich bin, betrachte, wird es schwer fallen zu zeigen, dass der andere meine Weißhaarfrisur hat. Der Induktionsanfang war also fehlerhaft.

Kehren wir zurück zu unserer Additionsaufgabe, für die wir behauptet haben:

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Für $k = 1$ müssen wir nur die 1 addieren. Rechts in der Formel ergibt sich $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, also alles richtig.

Machen wir den Spaß auch noch für $k = 2$. Links bilden wir also $1 + 2 = 3$. Prüfen wir rechts, so folgt: $\frac{2(2+1)}{2} = 3$. Auch das sieht sehr vernünftig aus.

Jetzt kommt der schwere Schritt.

Wir nehmen an, dass die Formel richtig sei für ein beliebiges k. Dann müssen wir ihre Richtigkeit auch für $k+1$ nachweisen. Wir müssen also zeigen:

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + k} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Dabei dürfen und müssen wir ausnutzen, dass wir links von dem unterklammerten Teil die Summe kennen. Damit rechnen wir einfach weiter:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1 + 2 + \cdots + k} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

und genau das wollten wir zeigen.

Mit diesem Trick könnten wir jetzt unsere Kenntnis von $k = 1$ auf $k = 2$, dann auf $k = 3$, dann auf $k = 4$ usw. erweitern. Also wissen wir das Ergebnis für alle natürlichen Zahlen.

10.4 Anwendung

Nun zurück zum Anstoßen. Eine Kleinigkeit gilt es zu beachten. Einer alleine wird mit niemandem anstoßen, da kein anderer da ist. Unsere Aufgabe macht also erst Sinn ab zwei Personen. Die stoßen dann genau einmal an. Bei N Personen haben wir daher zu bedenken, dass der N-te mit $N - 1$ Personen anstößt, also geht unsere Summe nur bis $N - 1$. Unser Anstoßproblem lautet daher in mathematischer Form:

Wie groß ist die Summe

$$1 + 2 + \cdots + (N-1)?$$

Nach unserer Formel ergibt sich daher:

$$1 + 2 + \cdots + (N - 1) = \frac{(N - 1) \cdot N}{2}.$$

Dazu ein paar Beispiele: Bei 30 Personen klingelt es

$$\frac{29 \cdot 30}{2} = 435,$$

ganz schönes Geklingel, das.

Bei 50 Personen sind es schon $\frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$ mal.

10.5 Verwandte Probleme

Diese Aufgabe, die Summe von n Zahlen zu bilden, tritt auch in anderem Gewand auf.

Zum Beispiel kann man fragen, wie oft sich N paarweise verschiedene Geraden im Raum höchstens schneiden können. Es ist nicht ausgeschlossen, dass alle Geraden parallel laufen; dann schneiden sie sich gar nicht. Das Minimum haben wir also schon. Es ist aber ausgeschlossen, dass zwei Geraden übereinstimmen; sie mögen bitte paarweise verschieden sein. Sonst hätten wir ja unendlich viele gemeinsame Punkte. Wie sieht es also mit der Höchstzahl bei verschiedenen Geraden aus?

Die Antwort lässt sich wörtlich von oben übernehmen. „Sich schneiden“ entspricht genau dem „miteinander anstoßen“. Also erhalten wir dieselbe Antwort wie oben in Satz 10.1:

N paarweise verschiedene Geraden im Raum schneiden sich höchstens in

$$\frac{(N - 1) \cdot N}{2}$$

Punkten.

Betrachten wir als weiteres verwandtes Problem folgende Figur:

Es handelt sich um so ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge 10. Wir haben eine Menge kleine quadratische Kästchen hineingemalt, alle gleich groß. Nun

Abb. 10.1: *Kästchenspiel zur Berechnung von* $1 + 2 + \cdot + (N - 1)$.

fragen wir, wieviel solche Kästchen sind das, natürlich bei einer Seitenlänge von N.

In unserm Beispiel haben wir bei einer Seitenlänge von $N = 10$ in der obersten Reihe 1 Kästchen, darunter zwei usw., bis wir in der untersten 9 Kästchen zählen. Zusammen sind das $1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ Kästchen nach unserer Formel.

Mit diesem Kästchenspiel können wir uns aber auf ganz andere Art die Formel für die Summe herleiten. Bei einer Seitenlänge N hätte das volle Quadrat $N \cdot N$ Kästchen. Die Diagonale spielt aber nicht mit. Dort sind N Kästchen versammelt. Die Differenz $N \cdot N - N$ müssen wir auf die obere und die untere Hälfte aufteilen, also durch 2 teilen und erhalten

$$\Sigma = \frac{N \cdot N - N}{2} = \frac{(N - 1) \cdot N}{2},$$

was genau unsere alte Formel ist.