MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. FLORIAN JARRE
DR. LI LUO
FELIX LIEDER

30 JUNI 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

22	23	24	25	Σ

NAME: ______________

MAT-NR.: ______________

GRUPPE: ______________

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 22: (Multiple Select)

Kreuzen Sie die Aussagen, die immer richtig sind, an (ohne Begründung).

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch gilt $f(x_1, x_2) = \frac{1}{6}(x_1 - x_2)^3$:

(1) ☐ Für den Gradienten ∇f von f gilt $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}$

(2) ☐ Für die Hessematrix $\nabla^2 f(x)$ gilt $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2) & -(x_1 - x_2) \\ (x_1 - x_2) & (x_1 - x_2) \end{pmatrix}$

(3) ☐ f besitzt mindestens eine lokale Minimalstelle.

(4) ☐ f ist nach unten beschränkt.

(b) Für die folgenden Matrizen A gilt:

(1) ☐ $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

(2) ☐ $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

(3) ☐ $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit

(4) ☐ $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

(1) ☐ Die Hessematrix von f existiert und ist symmetrisch in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$

(2) ☐ In jeder lokalen Minimalstelle $x^* \in \mathbb{R}^n$ von f ist die Hessematrix von f positiv semidefinit.

(3) ☐ In jeder lokalen Minimalstelle $x^* \in \mathbb{R}^n$ von f ist die Hessematrix von f positiv definit.

(4) ☐ Für $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Hessematrix von $f(x) = x^T H x$ gegeben durch $\nabla^2 f(x) = H + H^T$

Bemerkung: Punkteverteilung wie bei Aufgabe 2.

b.w.

Aufgabe 23: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^3$$

(a) Berechnen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$ den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $\nabla^2 f(x)$ von f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(c) Entscheiden Sie ob, bzw um welche Art von Extrema es sich bei den kritischen Stellen von f handelt.

Hinweis: Für die Klausurzulassung benötigen Sie 50 Übungspunkte. Falls Sie diese Vorraussetzung nicht erfüllen oder Spaß an zusätzlichen Aufgaben haben, können Sie Ihren Punktestand mit den folgenden 2 Bonusaufgaben erhöhen.

Aufgabe 24: (6 Bonuspunkte)

Wir nehmen an, dass 6 Firmen dasselbe Gut zu verschiedenen Preisen $p_i \in \mathbb{R}_+$ produzieren und zu unterschiedlichen Mengen $q_i \in \mathbb{R}_+$ absetzen.

p_i	100	110	150	170	180	200
q_i	1800	1750	1400	1200	1110	1000

(a) Zeichnen Sie Preise und Absatzmengen in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Dabei soll die x-Achse den Preis und die y-Achse den Absatz beschreiben.

(b) Wir unterstellen einen (affin) linearen Zusammenhang zwischen Preis und Absatz, d.h. $q(p) = x_1 + x_2 p$ mit unbekannten Parametern $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$: Wir definieren

$$A := ([1, p_i])_{i=1..6} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & p_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 2}$$

und

$$b := (q_i)_{i=1,..,6} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

. Berechnen Sie eine globale Minimalstelle $x^* = (x_1, x_2)^T$ von

$$f(x) := ||Ax - b||_2^2$$

und zeichnen Sie die durch

$$L := \{(p, x_1 + x_2 p) \mid p \in \mathbb{R}\}$$

definierte Gerade in das Koordinatensystem aus a) ein.

b.w.

Aufgabe 25: (6 Bonuspunkte)

In Aufgabe 21 haben Sie bereits gesehen wie sich eine globale Minimalstelle der Funktion $f(x) = ||Ax - b||_2$ berechnen lässt falls A^TA invertierbar ist. Da diese Vorraussetzung im Allgemeinen nicht immer erfüllt ist, betrachten wir die sogenannte Singulärwertzerlegung von A, von der man beweisen kann, dass sie immer existiert:

Sei

$$A = U\Sigma V^T$$

eine Singulärwertzerlegung einer reellen $m \times n$-Matrix A gegeben, d.h.

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist eine Matrix, die $\Sigma_{1,1} \geq \ldots \geq \Sigma_{k,k} \geq 0$ für $k := \min\{m,n\}$ und $\Sigma_{i,j} = 0$ für alle $i \in \{1,.,m\}$ und $j \in \{1,..,n\}$ mit $i \neq j$ erfüllt.
  (Matrizen dieser Art werden auch rechteckige Diagonalmatrizen genannt)
- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllen $UU^T = U^TU = I_m$ und $VV^T = V^TV = I_n$
  (Matrizen mit dieser Eigenschaft werden auch orthogonale Matrizen genannt)

Die positiven Diagonaleinträge von Σ seien die Einträge $\Sigma_{1,1}, \ldots, \Sigma_{p,p}$ mit $p \leq \min\{m,n\}$. Mit Σ^+ bezeichnen wir die Matrix, die aus Σ^T entsteht, indem für $1 \leq i \leq p$ die Einträge $\Sigma_{i,i}$ durch $1/\Sigma_{i,i}$ ersetzt werden. Mit A^+ bezeichnen wir die Matrix $A^+ = V\Sigma^+U^T$, die sogenannte *Pseudoinverse* von A.

Hinweis: Mann kann zeigen, dass die Definition von A^+ nicht von der speziellen Wahl von Σ, U bzw. V abhängt.

Man zeige:

(a) $A^+A = (A^+A)^T, \qquad AA^+ = (AA^+)^T$

(b) $AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+.$

(c) $A = A^{++}, \qquad (A^+)^T = (A^T)^+$

(d) Eine Lösung von

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

ist durch $x^* := A^+b$ gegeben.

Abgabe bis zum Donnerstag, 14. Juli 2016, 11:00 Uhr, in die Briefkästen (quer gegenüber von Raum 25.22.00.55, Geschäftszimmer des Mathematischen Instituts).
Besprechung in den Übungen ab 19. Juli 2016.