A2:

$$u_t = 4u_{xx} + x \cdot \cos(t) + 3t \cdot \sin(\pi x)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad , \quad t \geq 0$$

RB: $u(0,t) = 1 \quad , \quad u(1,t) = \sin(t)$

AB: $u(x,0) = 1 - x$

1. Schritt: RB homogen machen

Ansatz: $v(x,t) = u(x,t) + a(t) + x \cdot b(t)$

i) $0 = v(0,t) = 1 + a(t)$

$\Leftrightarrow a(t) = -1$

ii) $0 = v(1,t) = \sin(t) - 1 + b(t)$

$\Leftrightarrow 1 - \sin(t) = b(t)$

also:

$v(x,t) = u(x,t) - 1 + x \cdot (1 - \sin(t))$

$\Leftrightarrow u(x,t) = v(x,t) + 1 - x \cdot (1 - \sin(t))$

neue DGL:

1) $u_t = v_t + x \cdot \cos(t)$

2) $u_{xx} = v_{xx}$

Einsetzen in DGL:

$$v_t + \cancel{x \cdot \cos(t)} = 4v_{xx} + \cancel{x \cdot \cos(t)} + 3t \cdot \sin(\pi x)$$

$$v_t = 4v_{xx} + 3t \cdot \sin(\pi x)$$

RB: $v(0,t) = v(1,t) = 0$

AB: $v(x,0) = u(x,0) - 1 + x = 0$

2. Schritt: Löse neue, homogene DGL

$$\hat{v}_t = 4\hat{v}_{xx}$$

RB: $\hat{v}(0,t) = \hat{v}(1,t) = 0$

AB: $\hat{v}(x,0) = 0$

Mit Seperationsansatz: (s.u)

$$\hat{v}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\pi x) \cdot e^{-4(k\pi)^2 t}$$

Aus der AB folgt:

$$\hat{v}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_k = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

d.h.:

$$\hat{v}(x,t) = 0$$

<u>3. Schritt:</u> partikuläre Lsg.

$$\tilde{v}_t = 4\tilde{v}_{xx} + 3t \sin(\pi x)$$

RB: $\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(1,t) = 0$

AB: $\tilde{v}(x,0) = 0$ (immer gleich 0!)

Ansatz: $\tilde{v}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cdot \sin(\pi k x)$

$$\tilde{v}_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k'(t) \cdot \sin(\pi k x)$$

$$\tilde{v}_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -v_k(t) \cdot \pi^2 \cdot k^2 \sin(\pi k x)$$

<u>Einsetzen in DGL:</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k'(t) \cdot \sin(\pi k x) = \sum_{k=1}^{\infty} -4\pi^2 k^2 \cdot v_k(t) \cdot \sin(\pi k x) + 3t \cdot \sin(\pi x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (v_k' + 4\pi^2 k^2 v_k) \sin(\pi k x) = 3t \sin(\pi x)$$

<u>Koeff. vgl</u>

i) $v_1' + 4\pi^2 v_1 = 3t$

ii) $v_k' + 4\pi^2 v_k = 0 \qquad \forall\, k \neq 1$

Ferner folgt:

$$\tilde{v}(x,0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k(0) \cdot \sin(\pi k x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v_k(0) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

d.h. Anfangsbed für die gewöhnl. DGL

Löse gewöhnl. DGL:

zu 1) hom. Prob: $\hat{v}_1' + 4\pi^2 \hat{v}_1 = 0$
?

char. Polynom: $\lambda + 4\pi^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -4\pi^2$

$\Rightarrow \hat{v}_1(t) = e^{-4\pi^2 t}$

partielle Lsg.: Ansatz, keine Resonanz

$\tilde{v}_1(t) = A \cdot t + B$

$\tilde{v}_1'(t) = A$

Einsetzen in DGL   fällt das weg?

$A + 4\pi^2 At + 4\pi^2 B = 3t$

$\Rightarrow$ 1) $4\pi^2 \cdot A = 3$

$\Leftrightarrow A = \frac{3}{4\pi^2}$

2) $A + 4\pi^2 B = 0$

$\Leftrightarrow B = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot A = -\frac{3}{16\pi^4}$

d.h.: $v_1(t) = C \cdot e^{-4\pi^2 t} + \frac{3t}{4\pi^2} - \frac{3}{16\pi^4}$

Mit der Anfangsbed folgt:

$0 = v_1(0) = C - \frac{3}{16\pi^4}$

$\Leftrightarrow C = \frac{3}{16\pi^4}$

Zu 2) $v_k' + 4\pi^2 k \; v_k = 0$

char. Polynom $\lambda + 4\pi^2 k = 0$

$\lambda = -4\pi^2 k$

$v_k(t) = C \cdot e^{-4\pi^2 k}$

Anfangsbed.: $0 = v_k(0) = C$

$\Rightarrow v_k(t) = 0 \quad \forall k \neq 1$

Damit erhält man für $\tilde{v}$:

$$\tilde{v}(x,t) = \left(\frac{3}{16\pi^4} e^{-4\pi^2 t} + \frac{3t}{4\pi^2} - \frac{3}{16\pi^4}\right) \cdot \sin(\pi x)$$

Da $\hat{v}(x,t) = 0$, gilt:

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t)$$

Für u erhält man schließlich:

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 - x \cdot (1 - \sin(t))$$

$$= \left(\frac{3}{16\pi^4} e^{-4\pi^2 t} + \frac{3t}{4\pi^2} - \frac{3}{16\pi^4}\right) \cdot \sin(\pi x) + 1 - x(1 - \sin(t))$$

SEPERATIONSANSATZ:

$v_t = 4 v_{xx} \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$

$v(0,t) = v(1,t) = 0$

$[\, v(x,0) = \varphi(x) \,]$

Ansatz: $v(x,t) = f(x) \cdot g(t)$

$v_t(x,t) = f(x) \cdot g'(t)$

$v_{xx}(x,t) = f''(x) \cdot g(t)$

Einsetzen: $f(x) \cdot g'(t) = 4 \cdot f''(x) \cdot g(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(t)}{4g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \exists\, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \underset{(2)}{\frac{g'(t)}{4g(t)}} = \mu = \underset{(1)}{\frac{f''(x)}{f(x)}}$$

zu (1): $f''(x) = \mu f(x)$

$$\Leftrightarrow f''(x) - \mu f(x) = 0$$

RB liefern Randwerte für gew. DGL

$$0 = v(0,t) = f(0) \cdot \underbrace{g(t)}_{\neq 0} \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$$0 = v(1,t) = f(1) \cdot \underbrace{g(t)}_{\neq 0} \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Löse das Randwertproblem

char. Polynom: $\lambda^2 - \mu = 0$

$\lambda^2 = \mu$

$\lambda = \pm\sqrt{\mu}$

Fälle:

$\mu < 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = \pm i\sqrt{-\mu}$

Lösungen: $f(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{-\mu}\, x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{-\mu}\, x)$

Randbed: 1) $f(0) = c_1 = 0$

2) $f(1) = c_2 \cdot \sin(\sqrt{-\mu}) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{-\mu} = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \mu = -\pi^2 k^2$

d.h.: $f_k(x) = c \cdot \sin(\pi k x)$

$\mu = 0$: $\lambda = 0$ (doppelt)

$\Rightarrow f(x) = c_1 + c_2 x$

RB: $f(x) = 0$ (uninteressant)

$\mu > 0$ $\lambda = \pm\sqrt{\mu}$

$\Rightarrow f(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\mu}x} \cdot c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$

RB: 1) $f(0) = c_1 + c_2 = 0$

$\Leftrightarrow c_2 = -c_1$

2) $f(1) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\mu}} - c_1 e^{-\sqrt{\mu}}$

$= c_1 \cdot \underbrace{2 \cdot \sinh(\sqrt{\mu})}_{\neq 0,\ \text{da } \mu > 0} \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow c_1 = 0$

$\Leftrightarrow c_2 = 0$

d.h. $f(x) = 0$ (uninteressant)

$\Rightarrow$ nur für $\mu_k = -\pi^2 k^2$ existieren Lösungen, die DGL und Randwerte erfüllen und nicht trivial sind

Zu (2): für μ_k aus (1)

$$g'(t) = -4\pi^2 k^2 \cdot g(t)$$

Lösung: $g(t) = a_k \cdot e^{-4\pi^2 k^2 t}$

Wir betrachten die Reihe über alle Lösungen

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-4\pi^2 k^2 t} \cdot \sin(k\pi x)$$

Anfangsbed. wird durch Fourier-Entwicklung erfüllt.