Kubische Spline-Interpolation

Algorithmus

0. *Input: Knoten $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$; Daten $y_0, y_1, \ldots, y_n$*
   Output: stückweise Darstellung des kubischen, interpolierenden Splines u mit natürlichen Randbedingungen
1. *(Hilfsgrößen)*
   Berechne
   1.1 $h_k := x_{k+1} - x_k, 0 \leq k \leq n-1$
   1.2 $\mu_k := \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}, 2 \leq k \leq n-1$
   1.3 $\lambda_k := \frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}, 1 \leq k \leq n-2$
   1.4 $\delta_k := \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}, 0 \leq k \leq n-1$
   1.5 $d_k := \frac{6}{h_{k-1}+h_k}[\delta_k - \delta_{k-1}], 1 \leq k \leq n-1$

Kubische Spline-Interpolation

Algorithmus (Forts.)

2. *(Berechnung der Momente)*
   Setze

m_n $n \to$ Rand

$$m_0 = m_n = 0$$

und löse das LGS

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & & & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ je nachdem welche m's man bestimmen will muss man ~~[illegible]~~ $m_1 = 1 \times 1$
$m_2 = 2 \times 2$, $m_3 = 3 \times 3$

Kubische Spline-Interpolation

Algorithmus (Forts.)

3. *(Stückweise Darstellung des Splines)*
   Auf dem Intervall $I_k := [x_{k+1}, x_k]$, $0 \leq k \leq n-1$, hat der Spline u die folgende Darstellung:

$[x_{k+1}, x_k]$ $0 \leq k \leq n-1$

$$u_{|I_k}(x) = y_k + [\delta_k - \frac{1}{3} m_k h_k - \frac{1}{6} m_{k+1} h_k](x - x_k)$$
$$+ \frac{1}{2} m_k (x - x_k)^2$$
$$+ \frac{1}{6h_k}[m_{k+1} - m_k](x - x_k)^3.$$