Mathematische Grundlagen I (CES)
Übung 1

Alexander Jaust

MathCCES

17. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Kontrapositionsgesetz

Aufgabe 1
Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, dass das Kontrapositionsgesetz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

für beliebige Aussagen A, B gültig ist.

Kontrapositionsgesetz

Aufgabe 1
Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, dass das Kontrapositionsgesetz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

für beliebige Aussagen A, B gültig ist.

Hieraus folgt die Anwendbarkeit des indirekten Beweis.

Beispiel: Indirekter Beweis

Beispiel 1:
Gegeben seien zwei positive Zahlen a und b.

Beispiel: Indirekter Beweis

Beispiel 1:
Gegeben seien zwei positive Zahlen a und b.

Behauptung: Wenn $\underbrace{a^2 < b^2}_{\text{Aussage } A}$ gilt, dann gilt auch $\underbrace{a < b}_{\text{Aussage } B}$.

Beispiel: Indirekter Beweis

Beispiel 1:
Gegeben seien zwei positive Zahlen a und b.

Behauptung: Wenn $\underbrace{a^2 < b^2}_{\text{Aussage } A}$ gilt, dann gilt auch $\underbrace{a < b}_{\text{Aussage } B}$.

Es ist zu zeigen $A \Rightarrow B$.

Beispiel: Indirekter Beweis

Beispiel 1:
Gegeben seien zwei positive Zahlen a und b.

Behauptung: Wenn $\underbrace{a^2 < b^2}_{\text{Aussage } A}$ gilt, dann gilt auch $\underbrace{a < b}_{\text{Aussage } B}$.

Es ist zu zeigen $A \Rightarrow B$.

Mögliche Lösungswege:

1. Direkter Beweis: $A \Rightarrow B$
2. Indirekter Beweis: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
3. Beweis durch Widerspruch: $(\neg B) \wedge A$ ist falsch

Beispiel: Indirekter Beweis

Beispiel 1:
Gegeben seien zwei positive Zahlen a und b.

Behauptung: Wenn $\underbrace{a^2 < b^2}_{\text{Aussage } A}$ gilt, dann gilt auch $\underbrace{a < b}_{\text{Aussage } B}$.

Es ist zu zeigen $A \Rightarrow B$.

Mögliche Lösungswege:

1. Direkter Beweis: $A \Rightarrow B$
2. Indirekter Beweis: $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
3. Beweis durch Widerspruch: $(\neg B) \wedge A$ ist falsch

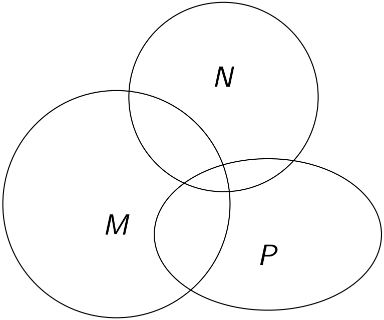
Wir wollen den **indirekten** Beweis durchführen.

Inhaltsverzeichnis

Gesetze von de Morgan (1)

Aufgabe 2:
Beweisen Sie die Regeln von de Morgan für beliebige Mengen M, N und P:

a) $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$
b) $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$.

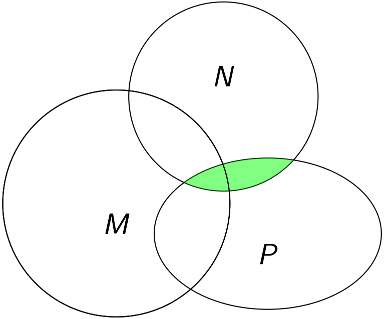


Gesetze von de Morgan (2)

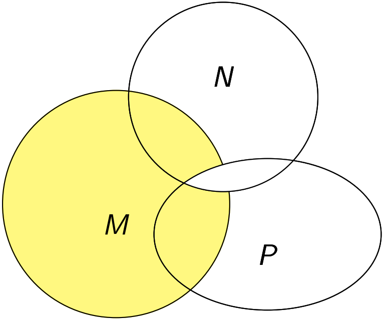
a) $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$

Linke Seite:

$N \cap P$:



$M \setminus (N \cap P)$:

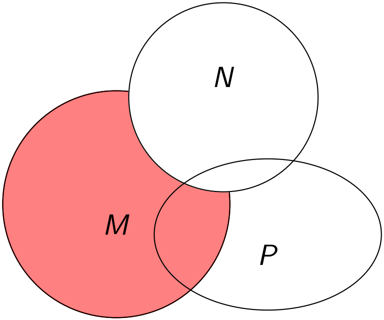


Gesetze von de Morgan (3)

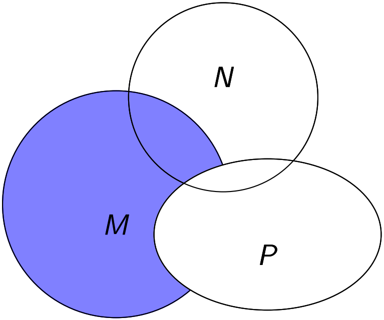
a) $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$

Rechte Seite:

$M \setminus N$:



$M \setminus P$:

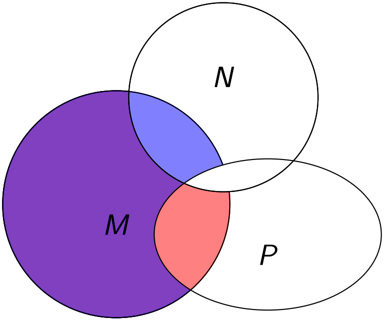


Gesetze von de Morgan (4)

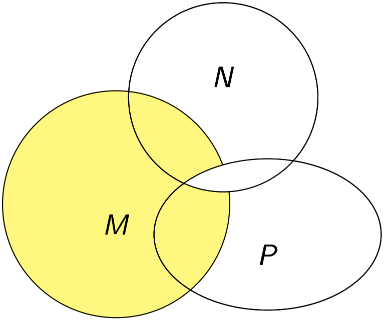
a) $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$

Beide Seiten:

$(M \setminus N) \cup (M \setminus P)$:



$M \setminus (N \cap P)$:



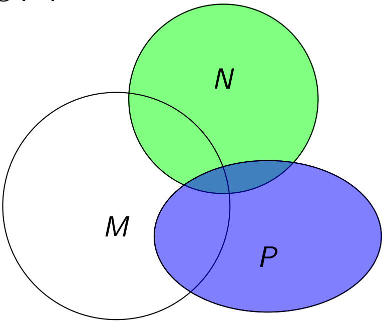
(alle Farbigen Teile)

Gesetze von de Morgan (5)

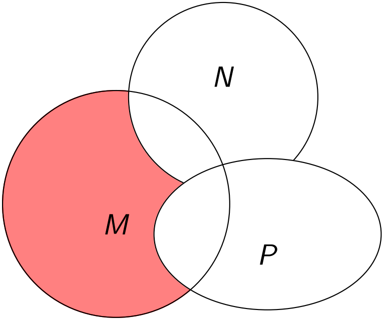
b) $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$

Linke Seite:

$N \cup P$:



$M \setminus (N \cup P)$:

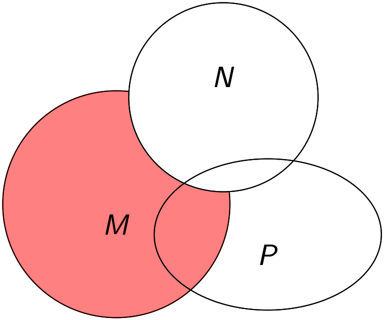


Gesetze von de Morgan (6)

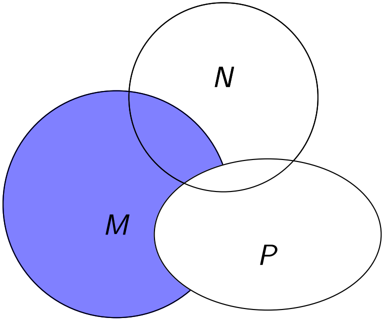
b) $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$

Rechte Seite:

$M \setminus N$:



$M \setminus P$:

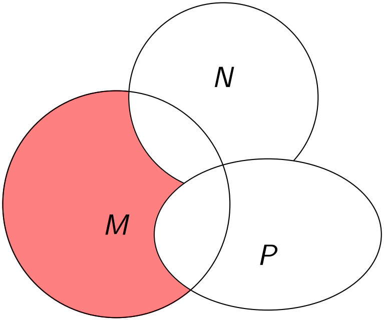


Gesetze von de Morgan (6)

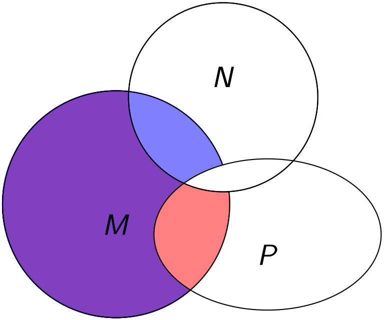
b) $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$

Beide Seiten:

$M \setminus (N \cup P)$:



$(M \setminus N) \cap (M \setminus P)$:



(nur der Teil in lila)

Inhaltsverzeichnis

Relationen

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Antisymmetrie und Totalität:

a) $=$ auf $\mathbb{N}$

b) $\neq$ auf $\mathbb{N}$

c) $\leq$ auf $\mathbb{N}$

d) $<$ auf $\mathbb{N}$

e) $|$ auf $\mathbb{N}$ (Teilbarkeit: $a|b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : an = b$)

Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Äquivalenzrelation und/oder eine (Total-)Ordnung handelt.