Lineare Algebra, Übung 7

1) Es sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten

$$0_K * v = \mathbf{0}, \quad \lambda * \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (-\lambda) * v = (-(\lambda * v)).$$

2) Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Man beweise, dass die Menge aller Linearkombinationen $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ ein Untervektorraum von V ist. Man beweise, dass die Menge aller Relationen zwischen $v_1, \ldots, v_n$ ein Unterraum von K^n ist.

3) Es sei

$$v_1, \ldots, v_n \tag{1}$$

eine Folge von Vektoren aus V.

Es seien $i, j \in [1, n]$ zwei verschiedene Zahlen und es sei $\lambda \in K$. Dann definieren wir eine neue Folge von Vektoren

$$w_1, \ldots, w_n, \tag{2}$$

wobei $w_\ell = v_\ell$ für $\ell \neq i$ und $w_i = v_i + \lambda v_j$. (Wir benutzen hier die Konvention: $\lambda v_j := \lambda * v_j$.)

Man beweise, dass $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_n)$. Man sagt, dass die Folge (2) aus die Folge (1) durch durch eine Scherung entsteht.

(Hinweis: Es sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Wenn $v_1, \ldots, v_n \in W$, so folgt $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) \subset W$.)

4) Man beweise, dass die folgenden Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^5$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^2 \\ 3^2 \\ 4^2 \\ 5^2 \\ 6^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^3 \\ 3^3 \\ 4^3 \\ 5^3 \\ 6^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^4 \\ 3^4 \\ 4^4 \\ 5^4 \\ 6^4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(Hinweis: Man benutze das Korollar 19 aus der Einführung.)

Abgabe bis Donnerstag, 2.6.2016, 14:00