Geg: A (4 | 1 | 0) ; B (7 | 3 | 1) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Gib die Gleichung der Ebene E in parametrischer- und parameterfreien Form an, die neben den Punkten A und B den $\vec{d}$ Vektor enthält

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrische Form

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Parameterfreie Form

$$\vec{AB} \times \vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

Normalform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$E_N: 3x - y - 7z - 12 + 1 + 0 = 0$$

$$E_N: 3x - y - 7z = 11$$

2. Gib die Gleichung der zu E parallelen Ebene E_1 an, die durch den Ursprung verläuft

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad ?$$

3. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{AB}$ in seine horizontale und vertikale Komponenten bezgl. $\vec{d}$ und damit den zugehörigen Lotvektor $\vec{e}$?

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{d}_{\vec{AB}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{3^2+2^2+1^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{19}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{p}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 2,7 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Bestimmen Sie den Winkel zw. $\vec{AB}$; $\vec{d}$ und den Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{d}$ aufgespannten Parallelogramms.

Winkel:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} +3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(3^2+1^2+7^2)} + \sqrt{5^2+1^2+2^2}} = \frac{15-1-14}{\sqrt{59}+\sqrt{15}}$$

$$\cos\beta = 29{,}75 \qquad \cos^{-1} = 88{,}1^\circ$$

A Parallelogramm: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -41 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{9^2+41^2+8^2} = \sqrt{81+1681+64} = 42{,}73 \text{ FE}$$

5. Bestimme die Menge der gemeinsamen Punkte $P(x/y/z)$ der Ebenen $[x, y, z]$ karth. Koord. von P

$E_1: \quad x + y + 2z = 1$

$E_2: \quad 2x + 4y - z = 3$

$E_3: \quad -x - 5y + 8z = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 8 & -3 \end{array}\right) \cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & -5 & 8 & -3 \end{array}\right) \cdot(1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & -2 \end{array}\right) \cdot(2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = -y - 2z + 1$

$x = 1 - 5z$

$z = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} z$

6. Bestimme das Volumen des von $\vec{AB}$; $\vec{d}$ und $\vec{f}$ aufgespannten Spats.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -123 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$V = |\vec{AB} \times \vec{d} \cdot \vec{f}\,|$

$V = \left| \sqrt{(-9)^2 + (-123)^2 + (-8)^2} \right|$

$V = 123.59$ VE