Fakultät für Mathematik der
Universität Duisburg-Essen
AG Analysis partieller Differentialgleichungen
Prof. Dr. G.S. Weiss

Übungen zur Analysis I WS 15/16
Blatt 5
Taylorentwicklung

Aufgabe 19. (4 Punkte)
Beweise, dass $e^2 > 7,3$ ist.

Aufgabe 20. (4 Punkte)
Beweise: Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$, so gilt in jedem $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

Aufgabe 21. (4 Punkte)

21.1. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Taylorjet von $f(x) = \cos(x)$ im Punkt 0.

21.2. Prüfe, ob der erhaltene Taylorjet für jedes $x \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ gegen $\cos(x)$ konvergiert, und, falls ja, beweise dies.

Aufgabe 22. Wiederholung (4 Punkte)
Zeige (nur durch Benutzen der Definition der Ableitung), dass $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, und dass $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Aufgabe 23. Wiederholung (4 Punkte)
Zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) := |x|^{\frac{1}{4}}$ in 0 stetig ist.

Zusatzaufgabe 24. (6 Punkte) Zeige: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \exp(\frac{1}{x}) & , x < 0 \\ 0 & , x \geq 0 \end{cases}$$

erfüllt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und der Taylorjet bez. die Taylorentwicklung im Punkt 0 konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ gegen einen reellen Wert, aber für $x < 0$ nicht gegen $f(x)$.

Abgabe bis 12 Uhr des 25.11.2015 in dem Kasten im Foyer an der Süd-Ostecke des Mathematik-Carrées.