Technische Universität Berlin **Wintersemester 2016/17**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: F. Lutz, R. Nabben, M. Rafler, P. Winkert Ausgabe: 04.11.2016
Ass.: D. Beßlich, M. Voß, J. Zur Abgabe: 14.11.-18.11.2016

2. Übungsblatt
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

(Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Teilräume)

Das **selbstständige** Lösen der schriftlichen Hausaufgaben ist eine **wichtige Vorbereitung** für die schriftliche Klausur. Auch wenn die Abgabe in Fünfergruppen erfolgt, sollte **jedes Gruppenmitglied** an der Formulierung der Lösungen zu **allen Aufgaben** beteiligt sein, denn auch die Klausur muss jedes Gruppenmitglied letztlich selber lösen. Sowohl die Klausur als auch die Hausaufgaben werden nach folgenden drei Kriterien bewertet:

1. **Die Aufgabestellung wurde verstanden.** (Überlegen Sie sich, was Sie zeigen sollen. Schreiben Sie dies ggf. auch mit auf.)
2. **Die einzelnen Rechenschritte und ihre Schlußfolgerungen sind korrekt, vollständig und nachvollziehbar dargestellt.**
3. **Die Fragestellung wurde vollständig beantwortet.** (Geben Sie einen Antwortsatz an.)

Hausaufgaben

1. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

   Gegeben sei die folgende Teilmenge des $\mathbb{C}^3$:

   $$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; 2x_1 = x_2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

   (a) Zeigen Sie, dass T_1 ein Teilraum des $\mathbb{C}^3$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge

   $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

   linear unabhängig ist und ein Erzeugendensystem von T_1 bildet. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von T_1?

   (c) Bestimmen Sie die Dimension von T_1.

2. **Aufgabe** **(2 Punkte)**

   Gegeben sei die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$:

   $$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

   Ist T_2 ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$?

3. **Aufgabe** **(4 Punkte)**

Wählen Sie aus der folgenden Menge zwei verschiedene Basen des $\mathbb{R}^2$ aus:

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. **Aufgabe** **(5 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Dimension des Teilraums

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ ib \\ 3b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

(b) Ist $\mathbb{R}^5$ ein Teilraum des $\mathbb{C}^5$?

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

Tutoriumsvorschläge

1. **Aufgabe**

   Gegeben seien die Vektoren:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix},\ \vec{v}_3 := \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}_4 := \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}_5 := \begin{pmatrix}-i\\4i\end{pmatrix},\ \vec{v}_6 := \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}_7 := \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   (a) Welche der Vektoren können addiert werden? In welchem Raum wird dies gemacht?

   (b) Bestimmen Sie $\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_6$.

   (c) Fertigen Sie eine Skizze der Mengen $M_1 := \{\alpha\vec{v}_2 | \alpha \in \mathbb{R}\}$, $M_2 := \operatorname{span}\{\vec{v}_3\}$, $M_3 := \operatorname{span}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ im $\mathbb{R}^2$ an.

   (d) Sind die Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear abhängig?

   (e) Stellen Sie die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^2$ als eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ dar.

   (f) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ als eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ dar.

   (g) Bestimmen Sie die lineare Hülle (oder Spann) von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ im $\mathbb{R}^2$.

   (h) Welche der folgenden Mengen sind Basen des $\mathbb{R}^2$: $\{\vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$?

   (i) Ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_6, \vec{v}_7\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   (j) Welche Basis hat der Vektorraum $\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^3$?

2. **Aufgabe**

   (a) Was sind geometrisch betrachtet die Teilräume des $\mathbb{R}^2$? Und des $\mathbb{R}^3$?

   (b) Untersuchen Sie anhand der Definition eines Teilraums, ob

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 = -5x_1 \right\}$$

   ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

   (c) Ist $M_2 := \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \cdot x_1^2 = 0 \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$?

3. **Aufgabe (Zusatz)**

   (a) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, das keine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, an.

   (b) Sind alle Basen Erzeugendensysteme? Sind alle Erzeugendensysteme Basen?

   (c) Gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ mit 2 Elementen? Mit 4 Elementen?

   (d) Bilden drei beliebige Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   (e) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{span}(M))$ für $M = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$. Ist M eine Basis des $\mathbb{R}^3$?