Prof. Dr. Sebastian Noelle
Prof. Dr. Mike Espig

Mathematische Grundlagen I (CES), WS 2014/15

Musterlösung Hausaufgabenübung Blatt 1

17.10.2014

Aufgabe 1. (Aussagenlogik)
Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, dass das Kontrapositionsgesetz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

für beliebige Aussagen A, B gültig ist.

Lösung.
Es seien A und B Aussagen. Dann gilt:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
w	f	w	f	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	w

Da in der letzten Spalte nur die Belegung w, also wahr, herauskommt, ist das Kontrapositionsgesetz bewiesen.

Aufgabe 2. (Indirekter Beweis)

Seien a und b zwei positive Zahlen, d.h. a>0 und b>0. Zeigen Sie mittels indirekten Beweis, dass

$$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$$

gilt.

Lösung.

In unserem Fall sind die Aussagen A und B

$$A: \quad a^2 < b^2$$
$$B: \quad a < b.$$

Zu zeigen ist also $A \Rightarrow B$.

Das Kontrapositionsprinzip sagt für zwei Aussagen A und B gilt:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Indirekter Beweis: Wir wollen zeigen, $\neg B \Rightarrow \neg A$.

$\neg B$ ist

$$a \geqslant b. \tag{1}$$

Wir können die Gleichung (1) einmal mit a und einmal mit b multiplizieren. Wir erhalten

$$a^2 \geqslant ab \tag{2}$$

und

$$ab \geqslant b^2. \tag{3}$$

Durch Kombination der Ungleichungen erhalten wir

$$a^2 \geqslant ab \geqslant b^2$$

und damit

$$a^2 \geqslant b^2.$$

Dies ist gerade die Aussage $\neg A$. Wir haben somit $\neg B \Rightarrow \neg A$ gezeigt. Also gilt auch $A \Rightarrow B$.

Aufgabe 3. (Morgansche Regeln)
Beweisen Sie die Regeln von de Morgan für beliebige Mengen M, N, P:

a) $M\backslash(N \cap P) = (M\backslash N) \cup (M\backslash P)$

b) $M\backslash(N \cup P) = (M\backslash N) \cap (M\backslash P)$.

Hinweis: Zeigen Sie die Gleichheit durch gegenseitige Inklusion ($A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ und $B \subseteq A$)
Achten Sie in Ihrer Lösung auf korrekte und saubere Notation.

Lösung.

a) Sei $x \in M\backslash(N \cap P)$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in M\backslash(N \cap P) &\Leftrightarrow (x \in M) \ \wedge \ (x \notin N \cap P) \\ &\Leftrightarrow (x \in M) \ \wedge \ (x \notin N \ \vee \ x \notin P) \\ &\Leftrightarrow (x \in M \ \wedge \ x \notin N) \ \vee \ (x \in M \ \wedge \ x \notin P) \\ &\Leftrightarrow (x \in M\backslash N) \ \vee \ (x \in M\backslash P) \\ &\Leftrightarrow x \in (M\backslash N) \cup (M\backslash P). \end{aligned}$$

Da x beliebig war, folgt $M\backslash(N \cap P) = (M\backslash N) \cup (M\backslash P)$.

b) Der Fall $N \cup P = M$ ist trivial und wird daher im Folgenden ausgeschlossen. Sei $x \in M\backslash(N \cup P)$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in M\backslash(N \cup P) &\Leftrightarrow (x \in M) \ \wedge \ (x \notin (N \cup P)) \\ &\Leftrightarrow (x \in M) \ \wedge \ (x \notin N \ \wedge \ x \notin P) \\ &\Leftrightarrow (x \in M \ \wedge \ x \notin N) \ \wedge \ (x \in M \ \wedge \ x \notin P) \\ &\Leftrightarrow (x \in M\backslash N) \ \wedge \ (x \in M\backslash P) \\ &\Leftrightarrow x \in (M\backslash N) \cap (X\backslash P). \end{aligned}$$

Also gilt $M\backslash(N \cup P) = (M\backslash N) \cap (M\backslash P)$.

Aufgabe 4. (Relationen)

Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Antisymmetrie und Totalität:

a) $=$ auf $\mathbb{N}$

b) $\neq$ auf $\mathbb{N}$

c) $\leqslant$ auf $\mathbb{N}$

d) $<$ auf $\mathbb{N}$

e) $|$ auf $\mathbb{N}$ (Teilbarkeit: $a|b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : an = b$)

Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Äquivalenzrelation und/oder eine (Total-) Ordnung handelt.

Lösung.

a) $=$ auf $\mathbb{N}$:

a) Reflexivität: ja, denn $\forall a \in \mathbb{N} : a = a$

b) Symmetrie: ja, denn: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a = b \Rightarrow\ b = a$.

c) Transitivität: ja, denn: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a = b$ und $b = c \Rightarrow\ a = c$

d) Antisymmetrie: ja, denn: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a = b$ und $b = a \Rightarrow\ a = b$

e) Konnexität: nein, denn z.B. für $a = 3, b = 2$ gilt weder $a = b$ noch $b = a$

Die Relation ist eine Äquivalenzrelation.
Die Relation ist eine Ordnung, aber keine Totalordnung.

b) $\neq$ auf $\mathbb{N}$:

a) Reflexivität: nein, denn $\exists a = 2 : a = a$

b) Symmetrie: ja, denn: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b \Rightarrow\ b \neq a$.

c) Transitivität: nein, denn für $a = 2, b = 3, c = 2$ gilt $a \neq b$ und $b \neq c$ aber $a = c$

d) Antisymmetrie: nein, denn für $a = 2, b = 3$ gilt $a \neq b$ und $b \neq a$, aber die Elemente sind verschieden ($a \neq b$)

e) Konnexität: nein, denn z.B. für $a = 2, b = 2$ weder $a \neq b$ noch $b \neq a$

Die Relation ist keine Äquivalenzrelation.
Die Relation ist keine Ordnung, also auch keine Totalordnung.

c) $\leqslant$ auf $\mathbb{N}$:

a) Reflexivität: ja, denn $\forall a \in \mathbb{N} : a \leqslant a$

b) Symmetrie: nein, denn für $a = 2, b = 3$ gilt $a \leqslant b$ aber $b > a$.

c) Transitivität: ja, denn: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a \leqslant b$ und $b \leqslant c \Rightarrow\ a \leqslant c$

d) Antisymmetrie: ja, denn: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leqslant b$ und $b \leqslant a \Rightarrow\ a = b$

e) Konnexität: ja, denn Seien $a, b \in \mathbb{N}$ dann gilt $a \leqslant b$ oder $b \leqslant a$ (oder beides)

Die Relation ist keine Äquivalenzrelation.
Die Relation ist eine Totalordnung.

d) $<$ auf $\mathbb{N}$:

   a) Reflexivität: nein, denn für $a \in \mathbb{N}$ gilt $a \nless a$

   b) Symmetrie: nein, denn für $a = 2, b = 3$ gilt $a < b$ aber $b \nless a$.

   c) Transitivität: ja, denn: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a < b$ und $b < c \Rightarrow \ a < c$

   d) Antisymmetrie: ja, denn: Da für $a, b \in \mathbb{N}$ niemals $a < b$ und gleichzeitig $b < a$ gelten kann, ist die Voraussetzung nie erfüllt, die Implikation ist daher wahr. (Denn es gilt für alle a, b die diese Voraussetzung erfüllen (nämlich keine!), dass $a = b$).

   e) Konnexität: nein, denn: Seien $a = 2, b = 2$ dann gilt $a = b$, also weder $a \nless b$ noch $b \nless a$.

   Die Relation ist keine Äquivalenzrelation.
   Die Relation ist keine Ordnung, also auch keine Totalordnung.

e) $|$ auf $\mathbb{N}$:

   a) Reflexivität: ja, denn für $a \in \mathbb{N}$ gilt $a|a$

   b) Symmetrie: nein, denn für $a = 2, b = 4$ gilt $a|b$ aber $b \nmid a$.

   c) Transitivität: ja, denn: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a|b$ und $b|c$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $an = b$ und $bm = c$. Daher gilt $c = bm = anm$. Da $nm \in \mathbb{N}$, existiert also ein $k = nm \in \mathbb{N}$ mit $ak = c$, also $a|c$

   d) Antisymmetrie: ja, denn: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a|b$ und $b|a$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $an = b$ und $bm = a$. Daher gilt $a = bm = anm \ \Rightarrow \ nm = 1 \ \Rightarrow n = m = 1$, da $n, m \in \mathbb{N}$. Und daher $a = b$.

   e) Konnexität: nein, denn z.B. für $a = 2, b = 3$ gilt weder $a|b$ noch $b|a$.

   Die Relation ist keine Äquivalenzrelation.
   Die Relation ist eine Ordnung, aber keine Totalordnung.