Lineare Hülle

Def. *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Einfaches Bsp in $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} : \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Die lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 6 *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums* $(V, +, \cdot)$*. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung *A sei eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums* $(V, +, \cdot)$. *Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, die A enthalten. Dann gilt: Die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$*:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung (Wir nehmen an, dass Satz 6 richtig ist). Z.z.: (i) $span(A) \subseteq \bigcap_{U\in\mathbb{A}} U$ und (ii) $span(A) \supseteq \bigcap_{U\in\mathbb{A}} U$.

(i) folgt aus Satz 6(b): Da für jedes $U \in \mathbb{A}$ gilt $span(A) \subseteq U$, ist $span(A) \subseteq \bigcap_{U\in\mathbb{A}} U$ (Die Schnittmenge $\bigcap_{U\in\mathbb{A}} U$ besteht aus Elementen, die in allen Mengen U vorhanden sind, und alle Elemente von $span(A)$ liegen nach Satz 6(b) in allen $U \in \mathbb{A}$).

(ii) folgt aus Satz 6(a): $span(A)$ ist ein Untervektorraum, der offensichtlich alle Elementen aus A enthält (weil man den Vektor $a \in A$ als Linearkombination $1 \cdot a$ bekommen kann). Also $span(A) \in \mathbb{A}$. Dann ist $span(A) \supseteq \bigcap_{U\in\mathbb{A}} U$ (weil $\bigcap_{U\in\mathbb{A}} U$ aus Elementen besteht, die in allen Mengen $U \in \mathbb{A}$ vorhanden sind, und deswegen auch in $span(A)$). $\square$

Beweis für Satz 6(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A liegt in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$.
Betrachte eine Linearkombination, z.B. (wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_i \in A$.)

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Wir haben: $\lambda_1 v_1 \in U$ (Abgeschlossenheit des Vektorunterraums bzgl. „$\cdot$„); $\lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. „$\cdot$„). Deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. „$+$„). Analog, $\lambda_3 v_3 \in U$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ wie bewiesen; deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in U$ usw.
Nach endlich viele solchen Überlegungen liegt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ in U

Beweis für Satz 6(a)

Z.z.:
$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \ \lambda_i v_i \ \middle| \ \ k \in \mathbb{N}, \ \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \ \text{und} \ \ v_i \in A \ \right\}$ ein Untervektoraum ist
Wir müssen zeigen, dass die Menge abgeschlossen bzgl.
(i) „+“ und (ii) „$\cdot$“ ist.

(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A.
Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt
$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$
sowie für irgendwelche $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt
$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$ Dann ist die Summe

$$v + u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

eine Linearkombination der Elementen aus A. Also, liegt $u + v$ in der ersten Menge oben.

(ii): Analog. Ist $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$, so ist
$\lambda \cdot v = \lambda(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \underbrace{(\lambda \cdot \lambda_1)}_{\mu_1} \cdot v_1 + ... + \underbrace{(\lambda \cdot \lambda_k)}_{\mu_k} v_k,$ $\square$

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, v_i$ heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. *Es sei* $(V, +, \cdot)$ *ein Vektorraum,* $A \subseteq V$ *sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt, dass* A *linear unabhängig ist, falls das Null-Element* $\vec{0}$ *des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der verschiedenen Elemente von* A *dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A *linear abhängig ist, wenn* A *nicht linear unabhängig ist, es also eine nichttriviale Linearkombination der verschiedenen Elemente von* A *gibt, die gleich* $\vec{0}$ *ist.*
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Bemerkung Das Wort „verschiedene“ in der Definition ist wichtig, weil man sonst $\vec{0}$ als $\underbrace{-1}_{\lambda_1} \cdot v + \underbrace{1}_{\lambda_2} \cdot v$ bekommen kann.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Bsp: *Die einelementige Menge* $\{v\} \subseteq V$ *ist genau dann linaer unabhängig, wenn* $v \neq \vec{0}$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination, z.B. $1v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.
„$\Leftarrow$“: Ist $v \neq \vec{0}$, so ist nach Lemma 5 jede nichttriviale Linearkombination λv nicht $\vec{0}$. $\square$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

genau dann $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wie entscheidet man, ob eine explizit gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist?

Zum Beispiel knallhart ausrechnen:
Angenommen, $n = 2$ und die Menge $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$.
Nach Definition ist A linear abhängig, falls es λ_1 und λ_2 gibt, so dass $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$, und so, dass die Linearkombination
$\lambda_1 \cdot \binom{1}{2} + \lambda_2 \cdot \binom{3}{4} = \binom{0}{0}$ ist, also
$\begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 \end{pmatrix} = \binom{0}{0}$ ist.
Das ist ein lineares Gleichungssystem für λ_1 und λ_2:
$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$. Man löst es z.B. mit dem Gauss-Verfahren.
Wenn es nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gibt (was in unserem Bsp der Fall ist), ist die Menge A linear unabhängig. Wenn es nichttriviale Lösungen $\binom{\lambda_1}{\lambda_2} \neq \binom{0}{0}$ gibt, ist die Menge linear abhängig und jede Lösung $\binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ liefert uns Koeffizienten der Linerakombination, die Null ergibt.

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass eine Menge aus m Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit $n < m$ immer linear abhängig ist.

Definition der Basis

Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) Linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Später werden wir auch über Basis-Tupel sprechen: ein Tupel $(v_1, ..., v_n)$ von Vektoren aus V heißt ein Basis-Tupel, wenn die Menge $A = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis-Menge ist, und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.
Wir werden oft das Wort „Menge“ bzw. „Tupel“ vergessen, also nur von Basen sprechen. Aus dem Kontext wird immer klar, ob wir von einem Tupel sprechen, also die Vektoren „nummeriert“ sind, oder für uns nur die Menge von Vektoren wichtig ist.

Bemerkung. Die Extra-Bedienung dass die Vektoren im Tupel verscheiden sind ist wichtig, sonst könnte das Tupel $(\underbrace{v}_{u_1}, \underbrace{v}_{u_2}, *, *, *)$ eine linear unabhängige Menge bilden, weil die entsprechende Menge A nur einmal v enthält. Die Linearkombination
$1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 0 \cdot (*) + 0 \cdot (*) + 0 \cdot (*)$ ist aber Null.

Def. Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis-Menge, falls sie

(a) Linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Warum haben wir den trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$ ausgeschlossen? Weil nach unserer Definition V keine Basis hat.
Tatsächlich, V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da sie linear abhänging ist: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis, da $span(\varnothing) = \varnothing$.
Nach Definition (aus kosmetischen Grunden, die später klar werden) setzten wir die Basis des trivialen Vektorraums gleich $\varnothing$.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

A=$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: Jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht alle λ_i gleich 0 sind.

Eigenschaft (b) ist nicht erfüllt: nicht alle Vektoren von $\mathbb{R}^3$ kann man als lineare Hülle darstellen.

Tatsächlich ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination der Vektoren aus A.

Antwort: Nein, A ist keine Basis.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (a) ist erfüllt: Jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht nicht alle λ_i gleich 0 sind.
Eigenschaft (b) ist auch erfüllt: Jedes Element von V hat die Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von Elementen aus A:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Antwort: Ja, A ist eine Basis.

Standard-Basis im $\mathbb{R}^n$

Bsp. vorher kann man auf beliebige $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern: Die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis (die sogenannte Standard-Basis) im $\mathbb{R}^n$.

Bsp. Ist die folgende Menge A eine Basis in $V = \mathbb{R}^3$?

$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus A.

$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Eigenschaft (a) ist nicht erfüllt (Bsp. vorher)

$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$

Wie kann man entscheiden, ob eine explizit gegebene Teilmenge $\{v_1, ..., v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Basis ist?

Man kann die Definition benutzen und die Aufgabe auf ein entsprechendes lineares Gleichungssystem zurückführen: Um die Eigenschaft (a) (= lineare Unabhängigkeit) zu prüfen, muss man das folgende homogene Gleichungssystem lösen:
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = \vec{0}$ (Die $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sind die Unbekannten, die Einträge von v_i sind die Koeffizienten in der $i-$ten Spalte des Systems, die rechte Seite ist 0.)
Heute haben wir bereits das System für das Beispiel $k = n = 2$, $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$ konstruiert.
Falls es nur die triviale Lösung gibt, ist das System linear unabhängig.
Falls es noch andere Lösungen gibt, ist das System linear abhängig.

Die Eigenschaft (b) kann man auch auf lineare Gleichungssysteme zurückführen. Es genügt zu zeigen, dass man die

Standard-Basis-Vektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ als

Linearkombinationen von $\{v_1, ..., v_k\}$ bekommen kann. In der Tat, wenn wir die Standard-Basis-Vektoren als Linearkombinationen von $v_1, ..., v_k$ erzeugen können, also wenn $e_1 = \lambda_1^1 v_1 + ... + \lambda_k^1 v_k$, ... , $e_n = \lambda_1^n v_1 + ... + \lambda_k^n v_k$ ist, dann ist ein beliebiger Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n = x_1(\lambda_1^1 v_1 + \ldots + \lambda_k^1 v_k) + \ldots + x_n(\lambda_1^n v_1 + \ldots + \lambda_k^n v_k)$$

$= [$ u.A. Distributiveigenschaft VII mehrmals angewendet $] =$

$\underbrace{(x_1\lambda_1^1 + \ldots + x_n\lambda_1^n)}_{\mu_1} v_1 + \ldots + \underbrace{(x_1\lambda_k^1 + \ldots + x_n\lambda_k^n)}_{\mu_k} v_k$, wie gewünscht.

Bsp. Angenommen, $k = n = 2$ und die Menge $A := \left\{ \binom{1}{2}, \binom{3}{4} \right\}$.

(a) haben wir heute gezeigt. Wir zeeigen jetzt (b).

Wir erzeugen $e_1 = \binom{1}{0}$ als $e_1 = \binom{1}{0} = -2 \cdot \binom{1}{2} + 1 \cdot \binom{3}{4}$ und $e_2 = \binom{0}{1} = \frac{3}{2} \cdot \binom{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \binom{3}{4}$ (ich habe die entsprechende Gleichungssysteme zu Hause gelöst). Also ist die Menge A eine Basis in $\mathbb{R}^2$. Ausserdem ist die Standard-Basis eine Basis in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Das Verfahren funktioniert, ist aber langweilig – man muss $n+1$ Gleichungssysteme lösen: ein homogenes $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$ um zu prüfen, ob die Menge linear unabhängig ist, und n inhomogene $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = e_i$, $i = 1, ..., n$ um zu prüfen, ob wir alle Vektoren e_i erzeugen können. Man bemerke auch, dass die linken Seiten in den Gleichungssystemen gleich sind, also das Gauss-Verfahren für alle Systeme sehr ähnlich verlauft – Unterschiede gibt es nur auf der rechte Seite des Systems.

MAN ERWARTET DESWEGEN, DASS MAN DAS VERFAHREN VIEL EINFACHER MACHEN KANN. DIES IST TATSÄCHLICH DER FALL: ES GENÜGT, NUR EIN SYSTEM ZU LÖSEN. WIR WERDEN ES IN DEN NÄCHSTEN VORLESUNGEN ERKLÄREN UND BEWEISEN