8. Aufgabenblatt — Analysis I

Aufgabe 8.1 (6 Punkte)**.** Untersuchen Sie die angegebenen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz (mit Beweis!):

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{4^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2})$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2k^4+4k+1}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\sqrt[k]{k}}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \cdot k^k}{(2k)!}$ f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{k}}$

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie für jede Zahl $r \in \mathbb{R}$ die angegebenen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz (mit Beweis!):

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|r|^k}{1+r^{2k}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{k} r^k$

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 6.24 und Satz 6.25 folgende Aussagen:

a) $|e - 2,718| < 10^{-3}$.

b) Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$.

c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} 5^n \cdot 2^{-n} \cdot \exp(-n) = 0$.

d) Ist (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \exp(a)$.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)**.** a) Seien $a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ und

$$d_m = \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j}.$$

Zeigen Sie, dass (d_m) keine Nullfolge ist.

Hinweis: Die Ungleichung $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ für $a, b \geq 0$ ist hier nützlich, vgl. Beweis von Satz 4.5.

b) Genügt es in Satz 6.20 beide Reihen nur als konvergent (nicht aber absolut konvergent) vorauszusetzen?