UE Mathematik 2, Wintersemester 2016/17
Beispiele für Einheit 7

Aufgabe 1: Gegeben Sei die Funktion $f(x) = 6 - x^2$

(a) Skizziere die obere Konturmenge $B(1)$ und die untere Konturmenge $W(1)$!
Gib die beiden Konturmengen auch in Intervallschreibweise an!

(b) Auf welche der folgenden Eigenschaften kann man für die Funktion f schliessen, wenn man nur die Konturmengen $B(1)$ und $W(1)$ betrachtet?

◯ f ist eine quasikonvexe Funktion	◯ f ist eine konvexe Funktion
◯ f ist keine quasikonvexe Funktion	◯ f ist keine konvexe Funktion
◯ f ist eine quasikonkave Funktion	◯ f ist eine konkave Funktion
◯ f ist keine quasikonkave Funktion	◯ f ist keine konkave Funktion

(c) Skizziere den Epigraphen von f!
Auf welche der Eigenschaften aus (b) kann man für die Funktion f schliessen, wenn man nur den Epigraphen von f betrachtet?

(d) Skizziere den Epigraphen von $-f$!
Auf welche der Eigenschaften aus (b) kann man für die Funktion f schliessen, wenn man nur den Epigraphen von $-f$ betrachtet?

Aufgabe 2: Gib an, ob die folgenden Funktionen konvex/konkav, quasikonvex/quasikonkav sind:

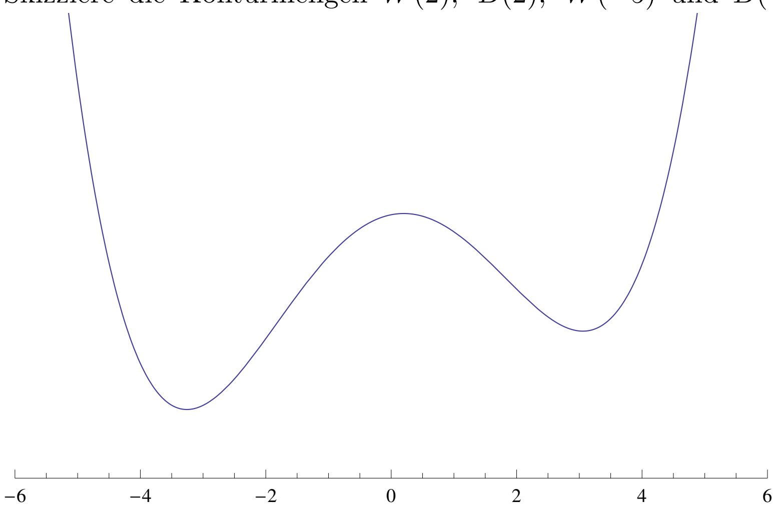
(a) $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

(b) $f(x) = e^x + 8x - 10$

(c) $f(x) = 10 - 500 \ln x - x^2, \quad D = (0;\ \infty)$

(d) $f(x, y, z) = x^4 - \sqrt{y} + 7z - 12, \quad D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

Aufgabe 3: Skizziere die Konturmengen $W(2)$, $B(2)$, $W(-5)$ und $B(-5)$ der folgenden Funktion:



Aufgabe 4: Die folgenden Skizzen zeigen obere Konturmengen einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. und einer Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

B_f:

B_g:

(a) Skizziere jeweils einen möglichen Funktionsgraphen, der zur Konturmenge passt!

(b) Beantworte folgende Fragen und begründe Deine Antworten:

i. Kann f eine konvexe Funktion sein?
ii. Muss f eine konvexe Funktion sein?
iii. Kann f eine monoton wachsende Funktion sein?
iv. Kann f eine quasikonkvexe Funktion sein?
v. Muss f eine quasikonkvexe Funktion sein?
vi. Kann f eine quasikonkave Funktion sein?
vii. Kann f eine unstetige Funktion sein?
viii. Kann f eine konkave Funktion sein?
ix. Muss f eine konkave Funktion sein?

(c) Beantworte die Fragen aus (b) auch für die Funktion g!

Aufgabe 5: Gegeben ist das Optimierungsproblem:

$$f(x,y) = 3y - 2x^2 \to \max \qquad \text{NB:} \quad 4x - y = 2$$

(a) Bestimme den Lösungspunkt P!

(b) Skizziere die obere Konturmenge $B(P)$ der Funktion f, den Lösungspunkt und die Nebenbedingung und aurgumentiere mit der Skizze, warum die gefundene Lösung globaler Maximizer des Problems ist!

(c) Gib ein anderes Argument dafür, dass die gefundene Lösung globaler Maximizer ist!

Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2\,y, \quad x, y \geq 0$
Skizziere die untere und die obere Konturmenge $W(Q)$ und $B(Q)$ mit $Q = (3,1)$!
Auf welche der Eigenschaften aus 1(b) kann man für die Funktion f schliessen, wenn man nur die Konturmengen $W(Q)$ und $B(Q)$ betrachtet?

Aufgabe 7: Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = \sqrt{ax} - x - y^2 + 10y - z + \ln z, \qquad a, x, y, z > 0$$

(a) Berechne den kritischen Punkt der Funktion f und gib an, ob es sich um einen Minimizer, Maximizer oder Sattelpunkt handelt!

(b) Ist das Optimum global? (Begründe!)

(c) Berechne die Optimalwertfunktion $f^*(a)$

(d) Berechne die totale Ableitung $\frac{df^*}{da}$

i. aus der Optimalwertfunktion!
ii. unter Anwendung des Envelope-Theorems!

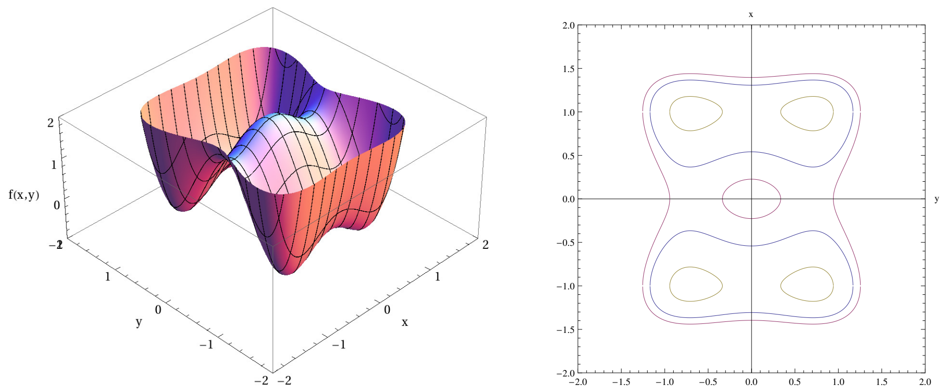
(e) Welche Bedingung müssen die Koordinaten eines Punktes $P(x_0,\, y_0,\, z_0) \in D_f$ erfüllen, damit in einer Umgebung des Punktes P der auf der Kurve $f(x, y, z) = c$ liegt

   i. y lokal als Funktion von x und z

   ii. z lokal als Funktion von x und y

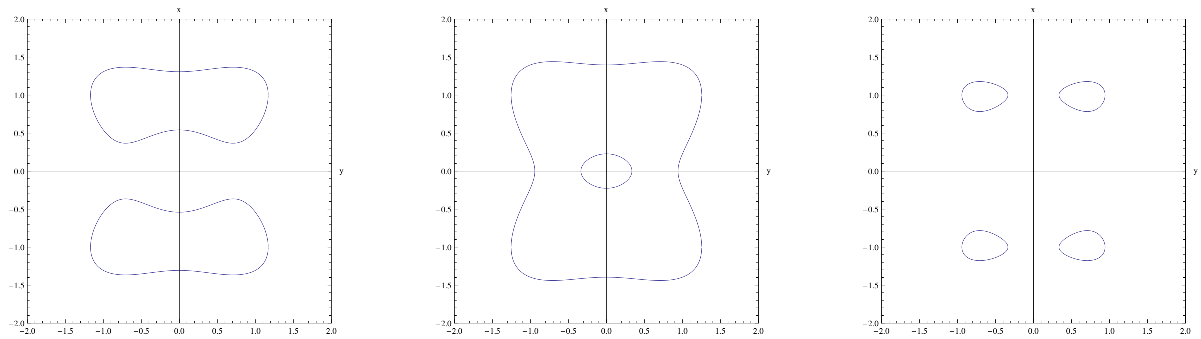
   dargestellt werden kann?

Aufgabe 8: Die Abbildung zeigt einen Kurvengraphen der Kurve $f(x, y)$ und das zugehörige Niveaulinienbild.



(a) $f(x, y)$ (b) Niveaulinien von f

Die drei folgenden Bilder zeigen Niveaulinien zu den Niveaus $c_1 = 1.8$, $c_2 = 1$ und $c_3 = -0.2$ Ordne die Bilder den Niveaus zu! Die 3 Punkte P, Q und R aus der Definitionsmenge von



(c) (d) (e)

f haben die Funktionswerte:

$$f(P) = 1.8, \quad f(Q) = 1, \quad f(R) = -0.2$$

Skizziere die folgenden Kontourmengen in den obigen Bildern:

$$B(P), \qquad W(Q), \qquad B(R)$$