Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und S. Opper

SoSe 2018
Dienstag, 29.05.2018
Blatt 7

Lineare Algebra I

Aufgabe 33.[5 Punkte] Sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum, der von den Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Bestimmen Sie, welche der folgenden Vektoren in V liegen:

$$\begin{pmatrix}0\\4\\2\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\3\\5\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 34.[4 + 4 Punkte] Beweisen Sie, dass die folgenden Systeme von Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linear unabhängig sind:

(1) $1, \sin(x), \cos(x)$;
(2) $1, \sin(x), \sin^2(x)$.

Aufgabe 35.[4 Punkte] Seien K ein Körper, V ein K–Vektorraum und $v_1, v_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren. Für welche $\lambda \in K$ sind die Vektoren $\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ und $\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$ linear unabhängig?

Aufgabe 36.[4 Punkte] Seien $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Polynome

$$\big(1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\big) \in \mathbb{R}[x]$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 37.[4 Punkte] Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Definieren wir eine neue Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \stackrel{\circ}{\longrightarrow} V$ nach der Regel $(\lambda, \vec{v}) \mapsto \bar{\lambda} \cdot \vec{v}$, wobei $\cdot$ die "alte Skalarmultiplikation und $\bar{\lambda}$ die zu λ konjugierte komplexe Zahl ist. Beweisen Sie, dass $(V, \circ, +)$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum ist, wobei $+$ die "alte" Vektoraddition bezeichnet.

Abgabe: Donnerstag, 07.06.2018 14:00 Uhr