Name: ____________________

Abiturprüfung 2015

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment insgesamt sechs Tage lang die Vermehrung von Pantoffeltierchen in einer Nährlösung. Zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage verwendet er für $0 \le t \le 3$ die Funktion N_1 mit der Gleichung

$$N_1(t) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und $N_1(t)$ als Anzahl der Pantoffeltierchen zum Zeitpunkt t aufgefasst.

Der Graph von N_1 ist in *Abbildung 1* dargestellt.

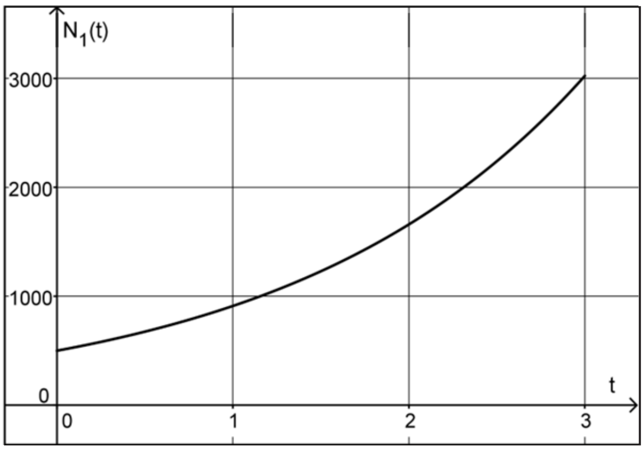

Abbildung 1

a) (1) *Berechnen Sie den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.*

Name: ____________________

(3) *Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung.*

[Zur Kontrolle: Die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung beträgt ungefähr 583.]

(4) Der Schüler berechnet einen Näherungswert für die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages, indem er das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ bildet.

Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ um weniger als 1 % von der in (3) berechneten durchschnittlichen Anzahl abweicht.

(5) *Weisen Sie nach, dass die prozentuale Abweichung des arithmetischen Mittels der Funktionswerte $N_1(a)$ und $N_1(a+0{,}5)$ von der durchschnittlichen Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung in einem Zeitintervall $[a;a+0{,}5]$ mit $0 \le a \le 2{,}5$ unabhängig von a weniger als 1 % beträgt.*

(2 + 3 + 3 + 4 + 6 Punkte)

Während der ersten drei Tage (für $0 \le t \le 3$) wird im Modell des Schülers die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen durch die Funktion r_1 mit der Gleichung

$$r_1(t) = 300 \cdot e^{0{,}6 \cdot t},\ t \in \mathbb{R},$$

beschrieben.

Dabei wird $r_1(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

b) Für die Funktion r_1 und die zugehörige Ableitungsfunktion r_1' gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage:

$$r_1(t) > 0 \text{ und } r_1'(t) > 0.$$

[Die Gültigkeit dieser Aussage müssen Sie nicht nachweisen.]

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.

(5 Punkte)

Name: ____________________

c) Bei der weiteren Beobachtung erkennt der Schüler, dass nach etwa drei Tagen die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen geringer wird. Um die Entwicklung ab dem Zeitpunkt $t = 3$ zu prognostizieren, sucht er eine Funktion, für deren momentane Änderungsrate r_2 zu jedem Zeitpunkt $t = 3 + a$ mit $0 \le a \le 3$ die Gleichung $r_2(3+a) = r_1(3-a)$ gilt.

(1) *Interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung* $r_2(3+a) = r_1(3-a)$, $0 \le a \le 3$, *im Sachzusammenhang.*

(2) *Leiten Sie aus der Gleichung* $r_1(t) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot t}$ *für die momentane Änderungsrate* r_1 *und der Gleichung* $r_2(3+a) = r_1(3-a)$, $0 \le a \le 3$, *die Gleichung*

$$r_2(t) = 300 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t},\ 3 \le t \le 6,$$

zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag her.

(3) *Ermitteln Sie ausgehend von den Funktionen* N_1 *und* r_2 *eine Gleichung der Funktion* N_2, *durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung (also für* $3 \le t \le 6$ *) beschrieben werden kann.*

[Zur Kontrolle: $N_2(t) = 1000 \cdot e^{1,8} - 500 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t}$.]

(4) Der Schüler verwendet die Funktion N_2 auch zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen für $t \ge 6$.

Begründen Sie, dass in diesem Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.

(3 + 4 + 5 + 3 Punkte)

d) Der Mathematiklehrer des Schülers schlägt eine alternative Modellierung vor: Statt die Anzahl der Pantoffeltierchen mit zwei Funktionen N_1 (für $0 \le t \le 3$) und N_2 (für $3 \le t \le 6$) zu beschreiben, rät er dem Schüler, zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung während der gesamten sechs Tage (also für $0 \le t \le 6$) nur eine Funktion N_{neu} mit

$$N_{\text{neu}}(t) = \frac{3\,781\,000}{625 + 6\,937 \cdot e^{-0,8023 \cdot t}},\ t \in \mathbb{R},$$

zu verwenden.

Name: ____________________

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von* N_{neu} *in die Abbildung 2 ein.*

[Die Gemeinsamkeiten und Abweichungen zwischen dem Graphen von N_{neu} und den Graphen von N_1 und N_2 müssen in Ihrer Zeichnung deutlich werden.]

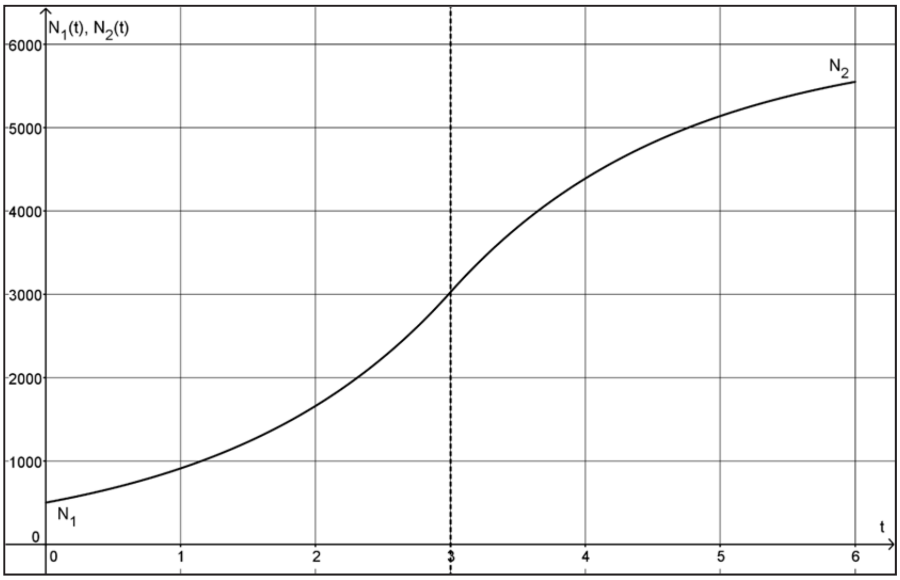

Abbildung 2

(2) Die mit der Funktion N_{neu} berechnete Anzahl der Pantoffeltierchen unterscheidet sich für $3 \le t \le 6$ maximal um ungefähr 215 Tierchen von der mit N_2 berechneten Anzahl.

Bestimmen Sie rechnerisch auch den maximalen Unterschied, der für $0 \le t \le 3$ *zwischen der mit* N_{neu} *berechneten Anzahl von Pantoffeltierchen und der mit* N_1 *berechneten Anzahl auftritt, und vergleichen Sie diesen Unterschied mit dem oben angegebenen maximalen Unterschied im Intervall* $[3;6]$.

(4 + 8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung