# <u>Der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$</u>

<u>Beweise:</u>

Mathematiker versuchen ihre Behauptungen durch Beweise zu untermauern. Die Suche nach absolut wasserdichten Argumenten ist eine der treibenden Kräfte der reinen Mathematik. Ausgehend von bereits Bekanntem oder Angenommenem führen Ketten von schlüssigen Argumenten den Mathematiker schliesslich zu einer Schlussfolgerung, die dann in die Galerie mathematischer Sätze aufgenommen wird.

**<u>Der Satz des Pythagoras</u>** gehört zu den wichtigsten Sätzen in der Euklidischen Geometrie. Der Satz ist nach Pythagoras von Samos, der den Satz angeblich als erster bewiesen haben soll, benannt. Dies wird allerdings bezweifelt, denn lange vor der Zeit von Pythagoras war der Satz schon in Indien und Babylonien bekannt. Dennoch hat die Forschung keine Beweise dafür, dass der Satz dort bewiesen worden ist.

**<u>Die Aussage:</u>** Bei einem rechtwinkeligen Dreieck mit der Seite c als Hypotenuse gilt die Formel <u>$a^2 + b^2 = c^2$</u>. Das heisst, die Summe der Quadrate der Katheten ist gleich dem Quadrat der Seite c. Dabei müssen sich die beiden Katheten rechtwinkelig schneiden, was dem entspricht, dass die Hypotenuse auf der gegenüberliegenden Seite des rechten Winkels liegt.

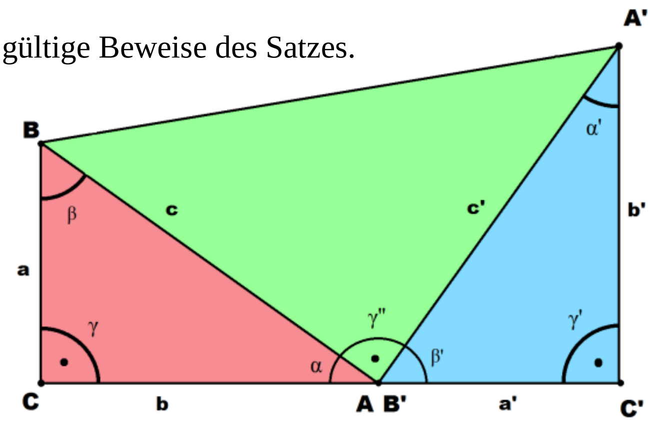
Man kann den Satz auch umkehren: Wenn der Satz gilt, dann ist das Dreieck rechtwinkelig, wobei der rechte Winkel der Seite c (der Hypotenuse) gegenüberliegt.

Um die Seite c zu berechnen, kann man die Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ verwenden. Für die Seiten a und b kann man die Formel einfach umkehren: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Der Satz kann auch dazu verwendet werden, um zu überprüfen ob das Dreieck rechtwinklig ist.

**<u>Der Beweis:</u>** Es gibt mehrere hundert gültige Beweise des Satzes. Dadurch ist der Satz des Pythagoras eines der meistbewiesen mathematischen Probleme. Einer der bekanntesten Beweise ist der des späteren Präsidenten der Vereinigten Staaten von Amerika, James A. Garfield. Hier sein Beweis:




Gegeben sei ein rechtwinkeliges Dreieck $\Delta ABC$. Durch die Verschiebung $\Delta ABC$ entlang der Strecke AB, sodass A=B‘, und der Drehung um A mit $\propto' = 90°$ erhält man das Dreieck $\Delta A'B'C'$. Diese Dreiecke sind kongruent zueinander ($\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$).

Simon Monai

Nach dem Innenwinkelsummensatz folgt, dass $\gamma = 90°$. Daraus folgt zusätzlich, dass $\alpha + \beta = 90°$. Da der Winkel ⊾$CAC' = 180°$ und $\alpha + \beta = \alpha + \beta' = 90°$ ist, folgt dass ⊾$A'B'B = 90°$ ist. Somit sind alle Dreiecke rechtwinkelig. Wenn man die Fläche von den drei Dreiecken ΔABC, ΔAA'B und ΔA'B'C' summiert, erhält man die Fläche des Trapez C'A'BC.

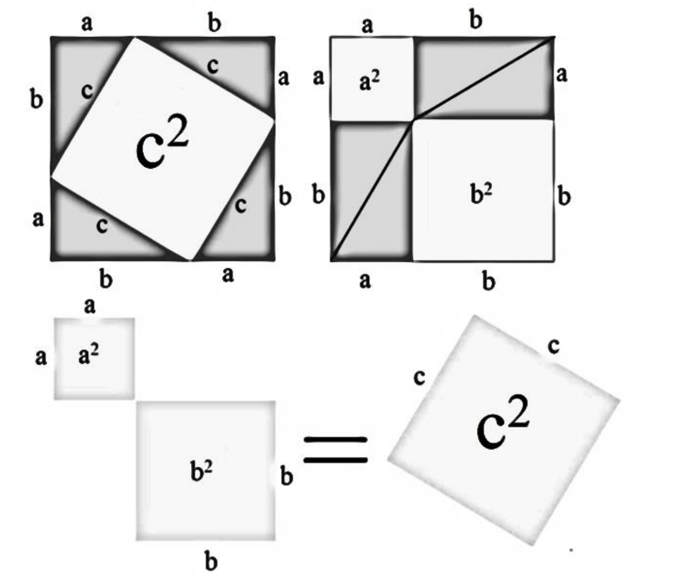
Als Gleichung dargestellt:

$$
\begin{array}{ccc|l}
A_{\text{Trapez}} & = & A_{\text{rotes }\Delta} + A_{\text{blaues }\Delta} + A_{\text{grünes }\Delta} & \\
\frac{1}{2}(a+b)(a+b) & = & \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cc & \\
\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2) & = & ab + \frac{1}{2}c^2 & \bullet 2 \\
a^2+2ab+b^2 & = & 2ab + c^2 & -2ab \\
a^2+b^2 & = & c^2 &
\end{array}
$$

Am Ende der Gleichung gilt: $\underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$. Dies entspricht dem Satz des Pythagoras.

**<u>Der Beweis des Bhãskara</u>** aus den 12. Jahrhundert, der „Ohne Worte" heisst:

In der Abbildung wurde das Quadrat mit der Seitenlänge a + b auf zwei Weisen unterteilt. Da die vier gleichen Dreiecke (dunkel) in beiden Quadraten auftreten, können wir sie entfernen, und die Fläche dieser verbliebenen Teile ist immer noch gleich. Wenn wir uns die Fläche dieser verbliebenen Teile anschauen, erkennen wir die bekannte Beziehung:
$a^2 + b^2 = c^2$.



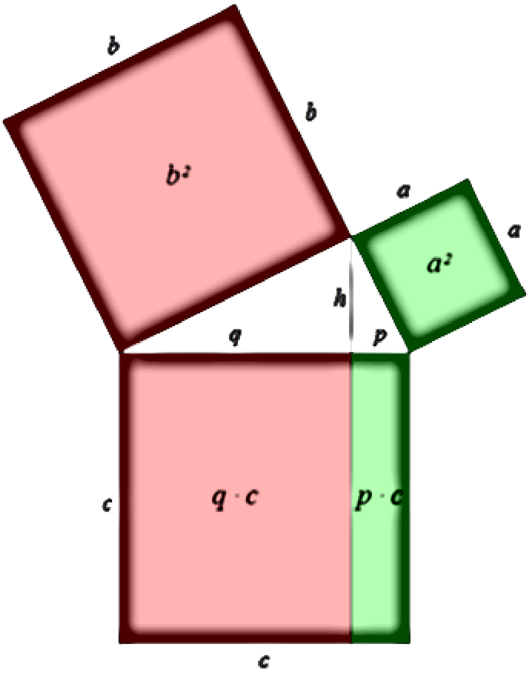
# Die Satzgruppe des Pythagoras:

Dazu gehört der Satz des Pythagoras,  der Kathetensatz und der Höhensatz von Euklid.

## Der Kathetensatz:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Seiten a, b, c  mit c als Hypotenuse. Teilt man dieses Dreieck in der Höhe c, und unterteilt die  Abschnitte der Gerade g in q und p, so erhält man je zwei gleich grosse Flächen. Als Formel:

$\boldsymbol{a^2 = p * c,\ b^2 = q * c.}$

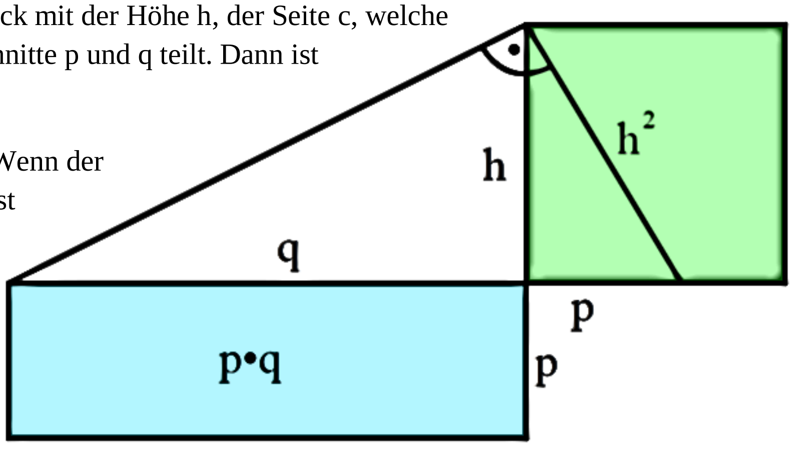



## Der Höhensatz von Euklid:

Der Höhensatz besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten ist.

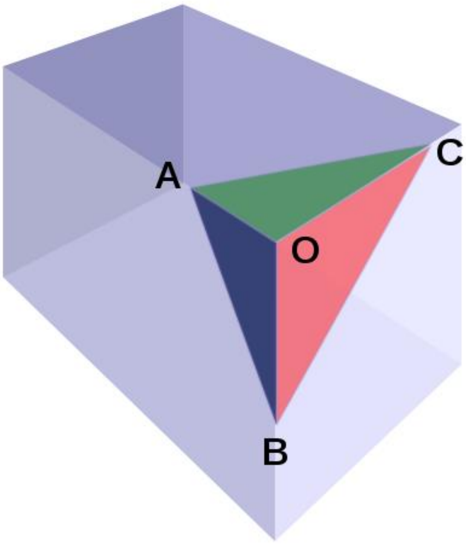
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe h, der Seite c, welche die Hypotenuse (Seite c) in die Abschnitte p und q teilt. Dann ist $\boldsymbol{h^2 = p * q}$.

Man kann den Satz auch umkehren: Wenn der Höhensatz in einem Dreieck gilt, so ist dieses rechtwinklig.




Simon Monai

# Der Satz von de Gua:




Er hat Ähnlichkeiten mit dem Satz von Pythagoras, er verwendet nur ein Tetraeder mit rechtwinkliger Ecke bei O anstatt ein rechtwinkliges Dreieck. Er besagt, dass die quadrierte Fläche, die der rechtwinkligen Ecke gegenüberliegt gleich der Summe der quadrierten Flächen die an der rechtwinkligen Ecke anliegen. Die Formel lautet bei einem Tetraeder mit den Ecken A, B, C und O $\boldsymbol{F^2}_{\boldsymbol{ABC}} = \boldsymbol{F^2}_{\boldsymbol{ABO}} + \boldsymbol{F^2}_{\boldsymbol{ACO}} + \boldsymbol{F^2}_{\boldsymbol{BCO}}$. Der Satz von Pythagoras und der von Gua sind Spezialfälle, wie Fermats letzter Satz beweist.

# Fermats letzter Satz: (auch als Grosser Fermatscher Satz bekannt)

Der Satz besagt, dass es keine vier ganzen Zahlen *x*, *y*, *z* und *n* gibt, sodass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ erfüllt ist, sofern n grösser ist als 2. Pierre de Fermat behauptete, er habe einen „wunderbaren Beweis" für diese Aussage, welcher Generationen von Mathematiker anstachelte, diesen Beweis zu finden. Er beschäftigte unzählige Mathematiker für über 300 Jahre, doch er konnte erst vor kurzem bewiesen werden.

Als Euler keine Lösung für *n = 3* finden konnte, formulierte er den Satz in folgender Form:

*Es gibt keine Lösungen in ganzen Zahlen für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für Werte von n grösser als 2.*

Für einen Beweis kann man sich mit niedrigen Werten von n beginnen und sich langsam hocharbeiten. So ging auch Fermat vor. Der Fall *n= 4* ist tatsächlich einfacher als *n = 3*, und Vermutlich hatte Fermat einen Beweis für diesen Fall. Im 18. Und 19. Jahrhundert füllte Euler zunächst die Lücke von *n = 3*, Adrien-Marie Legendre vervollständigte den Fall für *n = 5* und Gabriel Lamé bewies den Fall *n = 7*. Lamé glaubte ursprünglich, er habe einen Beweis für die allgemeine Aussage, was sich als falsch erwies.
Sehr wichtige Beiträge kamen von Ernst Kummer, der im Jahre 1843 sogar ein Manuskript mit einem allgemeinen Beweis einreichte. Peter G. L. Dirichlet entdeckte jedoch einen Fehler in dieser Arbeit. Die Französische Akademie der Wissenschaften setzte einen Preis von 3000 Francs für einen gültigen Beweis aus, der schliesslich an Kummer ging, dessen weitreichende Erkenntnisse immer noch den grössten Fortschritt darstellten. Kummer bewies den Satz für alle Primzahlen unter 100 sowie andere Zahlen, abgesehen von den irregulären Primzahlen 17, 59 und 67. Beispielsweise konnte er nicht beweisen, dass es keine ganzen Zahlen gibt, für welche die Gleichung $x^{67} + y^{67} = z^{67}$ erfüllt ist. Sein Fehlschlag, einen allgemeinen Beweis für Fermats letzten Satz vorlegen zu können, führte jedoch zur Entwicklung vieler hilfreicher Verfahren in der abstrakten Algebra. Vermutlich war sein Beitrag auf diese Weise für die Mathematik sogar wertvoller, als wenn er die eigentliche Frage beantwortet hätte.

Simon Monai

Im Jahre 1907 behauptete Ferdinand von Lindenmann, der die Unmöglichkeit der Quadratur bewiesen hatte, einen Beweis gefunden zu haben. Dies erwies sich jedoch auch als falsch. Im Jahre 1908 wurde von Paul Wolfskehl ein Preis von 100‘000 Goldmark für den ersten gültigen Beweis gestiftet, sofern dieser innerhalb der nächsten 100 Jahre erfolgen sollte. Danach wurden etwa 5000 Beweise eingereicht, die als falsch zurückgewiesen wurden.

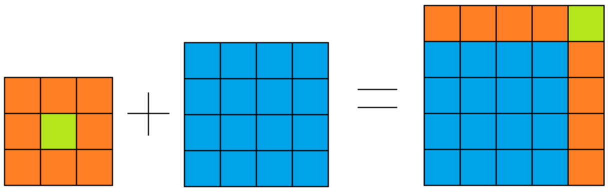
1993 hielt Andrew Wiles einen Vortrag über diese Theorie und trug dabei auch seinen Beweis vor. Leider erwies sich der auch als falsch.
Wiles zog sich nachher vollkommen zurück und arbeitete wie ein wahnsinniger an diesem Satz. Mit Hilfe eines Kollegen, Richard Taylor, konnte Wiles den Fehler beheben und durch ein gültiges Argument ersetzen. 1995 wurde der Beweis veröffentlicht und Wiles gewann so den Wolfkehl-Preis.

# Pythagoreische Tripel:

Als Pythagoreisches Tripel bezeichnet man ganzzahlige Lösungen für den Satz des Pythagoras.

Zur Ausstattung früherer Baumeister gehörte das allgegenwärtige 3-4-5-Dreieck, denn die Werte x = 3, y = 4 und z = 5 sind die kleinste ganzzahlige Lösung, die für den Satz des Pythagoras existiert. Das nennt man Pythagoreisches Tripel. Da der Satz gilt, muss das Dreieck rechtwinklig sein.
Diese Tatsache machten sich die alten Baumeister zunutze, um Wände und ähnliches im rechten Winkel zu bauen.

Im vorliegenden Fall kann man ein 3x3-Quadrat zerlegen und die Teile um ein 4x4-Quadrat legen und dabei ein 5x5-Quadrat zu erhalten. Das Pythagoreische Tripel 3, 4 und 5 ist das einzige mit 3 aufeinanderfolgenden Zahlen.



Weitere Pythagoreische Tripel sind:

5, 12, 13
6, 8, 10
7, 24, 25
8, 15, 17
9, 40, 41
11, 60, 61
12, 35, 37

15, 20, 25
15, 36, 39
16, 63, 65
20, 21, 29
24, 70, 74
20, 99, 101
…

Ein Dreieck mit den Seitenlängen die ein Pythagoreisches Tripel darstellen ist ein heronisches Dreieck, was bedeutet, dass die die Seitenlängen und die Fläche rationale Zahlen sind.

# Glossar:

| | |
|---|---|
| Reine Mathematik: | auch theoretische Mathematik genannt, befasst sich nur mit mathematischen Anwendungen |
| Euklidische Geometrie: | Die vertraute, anschauliche und uns bekannte Geometrie auf einer Ebene |
| Pythagoras von Samos: | 570 - 510 v. Chr.; Geb. in Griechenland, ausgewandert nach Süditalien |
| James Abram Garfield: | 1831 - 1881; USA; 20. US-Präsident |
| Bhãskara: | 1114 – 1185 n. Chr.; Indien |
| Euklid: | 360 – 280 v. Chr.; Griechenland; Autor *Der Elemente* |
| Jean Paul de Gua de Malves | 1713 – 1785 ; Frankreich |
| Tetraeder : | ein Körper mit 4 dreieckigen Flächen; siehe Bild S. 3 |
| Pierre de Fermat: | 160x – 1665; Frankreich; |
| Leonhard Euler: | 1707 – 1783; Schweiz |
| Adrien-Marie Legendre: | 1752 – 1833; Frankreich |
| Gabriel Lamé: | 1795 – 1870; Frankreich |
| Ernst Eduard Kummer: | 1810 – 1893; Deutschland |
| Peter Gustav Lejeune Dirichlet: | 1805 – 1859; Deutschland |
| Abstrakte Algebra: | Teilgebiet der Mathematik, Verbindungen zu allen Zweigen der Mathematik |
| Carl Louis Ferdinand von Lindenmann: | 1852 – 1939; Deutschland |
| Andrew John Wiles: | Geb. 1953; Grossbritannien |
| Richard Taylor: | Geb. 1962; Grossbritannien; Assistent von Wales |
| Heronisches Dreieck: | lässt sich in 2 rechtwinklige Dreiecke zerlegen, Seitenlänge und Fläche sind rationale Zahlen |
| Rationale Zahl: | Zahl, die sich als Bruch schreiben lässt |
| Irrationale Zahl: | Eine Zahl, die sich nicht als Bruch schreiben lässt, z.B. Pi (Π) |