

Definition:

Der Ausdruck $W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$ heißt **Wronski-Determinante** der Funktionen $y_1(x), y_2(x)$. (Benannt nach dem polnischen Mathematiker JOSEF WRONSKI 1776-1852)

Ist $W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$ so bilden die Funktionen $y_1(x), y_2(x)$ eine Basis des

Lösungsraums der Differentialgleichung, man nennt diese Funktionen dann das **Fundamentalsystem** des Lösungsraumes.

Beispiel :

Für die Funktionen $y_1(x) = e^x \cos 2x$ und $y_2(x) = e^x \sin 2x$ gilt

$y_1'(x) = e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x)$ und $y_2'(x) = e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$ und wir erhalten für die Wronski-Determinante

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x) & e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) \end{pmatrix} \\ &= e^{2x} (\cos 2x \sin 2x + 2 \cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x + 2 \sin^2 2x) = 2e^{2x} \neq 0. \end{aligned}$$