Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Erné, apl. Prof. Dr. T. Holm

20. April 2009

Übungen zu Diskrete Strukturen
Sommersemester 2010
Blatt 2 - Lösungshinweise

5. Beweisen Sie die Gleichung $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
   (a) mit vollständiger Induktion
   (b) durch Ableiten der Funktion $(1+x)^n$ an der Stelle 1
   (c) durch Kürzen der Faktoren k und n.

Lösung: Wir benutzen im Folgenden mehrfach die allgemeine binomische Formel (Skript 1.7 (3)): $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, insbesondere $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$. (*)

(a) Induktionsanfang $n = 1$: auf beiden Seiten ergibt sich 1.

Sei nun $n > 1$ und die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung). Für $n+1$ ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1)\binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} + (n+1) && \left(\text{da } \tbinom{n+1}{k} = \tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\binom{n}{k} + (n+1) && \text{(Indexverschiebung)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + (n+1) \\
&= n2^{n-1} + (n2^{n-1} - n) + (2^n - 1) + (n+1) && \text{(Ind.vor. und (*))} \\
&= (n+1)2^n.
\end{aligned}
$$

(b) Nach der allgemeinen binomischen Formel gilt: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Leitet man diese beiden Darstellungen der Funktion nach x ab (links mit der Kettenregel, rechts gliedweise), so erhält man $n(1+x)^{n-1} = ((1+x)^n)' = \sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} x^{k-1}$. Einsetzen von $x = 1$ ergibt die gewünschte Formel $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k\binom{n}{k}$.

(c) Durch Herausziehen von n und Kürzen von k ergibt sich direkt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}
$$

6. (a) Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^9 in $(x-1)^{14}$.
   (b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass p die Binomialkoeffizienten $\binom{p}{i}$ für alle $i = 1, \ldots, p-1$ teilt.

(c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Getränkesorten (von jeder ist genügend vorrätig) eine Kiste mit 24 Flaschen zusammen zu stellen?

Lösung: (a) (i) Nach der allgemeinen binomischen Formel (Skript, Satz 1.7 (3)) gilt

$$(x-1)^{14} = \sum_{m=0}^{14} \binom{14}{m} x^m (-1)^{14-m} = \sum_{m=0}^{14} (-1)^{14-m} \binom{14}{m} x^m.$$

Insbesondere hat der Koeffizient von x^9 den Wert $(-1)^{14-9}\binom{14}{9} = -2002$.

(b) Nach Definition ist $\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!i!}$. Der Zähler ist durch die Primzahl p teilbar, der Nenner aber nicht. Der Faktor p im Zähler kann sich also nicht wegkürzen und es gilt daher, dass p den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{i}$ teilt.

(c) Wir stellen uns die 24 Positionen im Kasten als auf einer Linie angeordnet vor. Jede mögliche Auswahl von Flaschen können wir eindeutig festlegen durch den Eintrag von vier (geordneten) Trennstrichen in den 25 Zwischenräumen (inklusive links des ersten und rechts des letzten Halters). Zum Beispiel bedeutet

$$\circ\circ\circ||\circ\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

3 Flaschen von Getränk 1, 0 von Getränk 2, 5 von Getränk 3, 8 von Getränk 4 und 8 von Getränk 5.

Da die Trennstriche geordnet sind, sind obige Zuordnungen nichts anderes als monotone Funktionen von den 4 Trennstrichen in die 25 Zwischenräume. Also ist die gesuchte Anzahl gerade die Anzahl der monotonen Funktionen von $\underline{4}$ nach $\underline{25}$, diese ist nach [Skript, Satz 1.10] gleich $\binom{28}{4} = 20475$.

7. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

   (a) unter Verwendung der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ die *Leibniz-Formel*:
   Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die n-mal differenzierbar sind ($n \in \mathbb{N}$), so gilt für die n-te Ableitung des Produkts:

   $$(fg)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f^{(m)} g^{(n-m)}.$$

   (b) für $c \in \mathbb{C}$ und $f_n(x) = x(x+c)\dots(x+(n-1)c)$:

   $$f_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f_m(x) f_{n-m}(y).$$

Lösung: (a) Beweis per Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 1$ ist gerade die Produktregel (die wir ja verwenden dürfen).

Induktionsvoraussetzung: die Formel sei korrekt für n.

Induktionsschluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f^{(m)} g^{(n-m)} \right)' && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(f^{(m)} g^{(n-m)} \right)' && \text{(Summe gliedweise ableiten)} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(f^{(m+1)} g^{(n-m)} + f^{(m)} g^{(n-m+1)} \right) && \text{(Produktregel)}
\end{aligned}$$

Eine Indexverschiebung im ersten Teil der Summe liefert

$$\begin{aligned}
&= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{m=1}^{n}\left(\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}\right) f^{(m)}g^{(n-m+1)} + f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m} f^{(m)}g^{(n+1-m)}. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

(b) Beachten Sie, dass $f_0(x) := 1$ (leeres Produkt!).

Induktionsanfang $n = 1$: auf beiden Seiten ergibt sich $x + y$, denn

$$f_1(x+y) = x + y = \binom{1}{0} f_0(x)f_1(y) + \binom{1}{1} f_1(x)f_0(y).$$

Induktionsvoraussetzung: die Formel sei korrekt für n.

Induktionsschritt von n auf $n + 1$: nach Definition ist

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x+y) &= (x+y)(x+y+c)\dots(x+y+(n-1)c)(x+y+nc) \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} f_m(x)f_{n-m}(y)\right)(x+y+nc) \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} f_m(x)f_{n-m}(y)\right)(x+mc+y+(n-m)c) \\
&= \left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} f_{m+1}(x)f_{n-m}(y)\right) + \left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} f_m(x)f_{n-m+1}(y)\right) \\
&= f_{n+1}(x)f_0(y) + \left(\sum_{m=1}^{n}\left(\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}\right) f_m(x)f_{n-m+1}(y)\right) + f_0(x)f_{n+1}(y) \\
&= \sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m} f_m(x)f_{n+1-m}(y). \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Knacky 2: Jeder dritte zählt!

Addiert man für festes n jeden dritten Binomialkoeffizienten, so weicht die Summe um weniger als 1 von $2^n/3$ ab. Zeigen Sie genauer:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+r} = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^n 2\cos\frac{2(n+r)\pi}{3}) \text{ für } r = 0,1,2.$$

Lösung: Beweis per Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 1$: Für $r = 0, 1$ ergibt sich auf beiden Seiten 1, für $r = 2$ ergibt sich 0.

Induktionsvoraussetzung: die Formel sei korrekt für n (und alle $r = 0, 1, 2$).

Induktionsschluss von n auf $n + 1$: für alle $r = 0, 1, 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{3k+r} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{3k+r-1} + \binom{n}{3k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+r-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+r}
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist die übliche Formel $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$ (Pascalsches Dreieck); in der zweiten haben wir benutzt, dass die Binomialkoeffizienten der Summanden für $k = n+1$ Null sind, da die untere Zahl größer als die obere ist. Nun gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^n 2\cos\frac{2(n+r-1)\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^n 2\cos\frac{2(n+r)\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n 2 \underbrace{\left(\cos\frac{2(n+r-1)\pi}{3} + \cos\frac{2(n+r)\pi}{3}\right)}_{(*)}\right) \end{aligned}$$

Die Summanden im Ausdruck (*) können wegen der 2π-Periodizität des Cosinus nur die Werte $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ und $\cos 2\pi = 1$ annehmen; genauer sieht man, dass $(*) = -\cos\frac{2(n+r+1)\pi}{3}$ ist. Damit folgt aus den vorherigen Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{3k+r} = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^{n+1} 2\cos\frac{2(n+1+r)\pi}{3}\right)$$

und der Induktionsschluss ist gelungen.